

Relativistische Quantenmechanik

Georg Wolschin

<http://wolschin.uni-hd.de>

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK



Vorwort

Diese Vorlesung ist eine kurzgefasste Einführung in die Grundlagen der relativistischen Quantenmechanik. Sie ist konzipiert als einsemestrige, zweistündige Veranstaltung für Bachelor- und Masterstudenten; einige der fortgeschritteneren Teile können auch für Promovierende von Interesse sein.

Primäre Adressaten sind Studierende ab dem vierten Semester, die den Quantenmechanik-Grundkurs schon bearbeitet haben (oder ihn gleichzeitig hören), aber darüber hinaus relativistische Wellenleichungen kennenlernen möchten, insbesondere die Dirac-Gleichung für Fermionen, und die Klein-Gordon-Gleichung für Bosonen. Im Coulomb-Feld von wasserstoffähnlichen Kernen lassen sich mit relativistischen Wellengleichungen die elektronischen (oder myonischen) Energieniveaus und Eigenfunktionen – bis auf quantenelektrodynamische Effekte – analytisch berechnen. Entsprechendes gilt für pionische (oder kaonische) Atome.

In der Einleitung zeichne ich zunächst die Entwicklung nach, deren Ergebnis die Aufstellung Lorentz-invarianter relativistischer Wellengleichungen durch Schrödinger, Klein, Gordon und Dirac war. Das Literaturverzeichnis (jeweils am Kapitelende) enthält dementsprechend auch einige der wissenschaftshistorisch interessanten Originalarbeiten. Ziel des Buches ist es jedoch, ausgehend von der ursprünglichen Formulierung der relativistischen Quantenmechanik zu aktuellen Forschungsfragenstellungen zu kommen.

Nach einem Kapitel über die Verbindung zur Galilei-invarianten nicht-relativistischen Quantenmechanik folgen die Darstellungen der Klein-Gordon- und Dirac-Gleichungen und die Untersuchung der Dirac-Theorie im Hinblick auf Invarianzen bezüglich Paritäts-, Ladungskonjugations- und Zeitumkehrtransformation. Wenngleich in der Natur als Folge der schwachen Wechselwirkung jede dieser Symmetrieoperationen verletzt

ist (die Verletzung der T -Invarianz wurde erst 2012 schlüssig nachgewiesen), zeigt sich die Dirac-Theorie mit elektromagnetischer Wechselwirkung invariant gegenüber diesen Transformationen.

Wie die Klein-Gordon-Gleichung lässt sich auch die Dirac-Gleichung mit Coulomb-Potenzial analytisch lösen, und wir können die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen für wasserstoffähnliche Atome in geschlossener Form berechnen. Dabei wird zunächst die durch Vakuumfluktuationen erzeugte Lamb-Shift vernachlässigt. Wir können sie in einer didaktisch motivierten Überlegung abschätzen, aber erst in der Quantenelektrodynamik (QED) genau berechnen; Präzisionsmessungen bestätigen diese Theorie mit sehr hoher Genauigkeit.

Besondere Bedeutung haben Lösungen der Dirac-Gleichung für myonische Atome, da der Bohr'sche Radius des Myons wegen der großen Teilchenmasse 207-mal kleiner als der des Elektrons ist, das Myon deshalb empfindlich auf die Eigenschaften des Kerns elektromagnetisch reagiert und die Wellenfunktionen tiefliegender Zustände sehr genau bestimmt werden müssen. Die mittleren Bahngeschwindigkeiten skalieren mit der Ladungszahl Z des Kerns und werden deshalb bei schweren myonischen Atomen in tiefliegenden Niveaus ($n = 1, 2$) mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar, so dass Lösungen der Schrödinger-Gleichung dort unbrauchbar sind.

Ein interessantes Beispiel der Anwendung relativistischer Wellengleichungen ist das Klein'sche Paradoxon, die unerwartet hohe Transmission relativistischer Elektronen durch eine steil ansteigende (im Idealfall senkrechte) Potenzialwand. Obwohl die Originalrechnungen von Klein und Sauter mehr als 80 Jahre zurückliegen, können wir die Voraussage bis heute nicht einwandfrei experimentell testen, da sich genügend starke Felder bisher nicht erzeugen lassen. Möglicherweise gelingt dies in Zukunft mit Hilfe elektrostatischer Barrieren in Graphen.

Die Weyl-Gleichung ähnelt der Dirac-Gleichung, gilt jedoch nur für Fermionen mit Masse $m = 0$. Anders als die Dirac-Gleichung mit endlicher Masse verletzt sie die Paritätsinvarianz und wurde deshalb erst nach der experimentellen Bestätigung der Paritätsverletzung von den Theoretikern akzeptiert. Zwar ist seit der Entdeckung der Neutrinooszillationen (2002) klar, dass Neutrinos – anders als von Pauli ursprünglich vorgesehen – nicht masselos sind, sondern eine geringe Ruhemasse haben, deren genaue Bestimmung Gegenstand heutiger experimenteller Forschung ist. Dennoch kann die Weyl-Gleichung einige grundlegende Eigenschaften der Neutrinos (präziser: masseloser Fermionen) wie ihre Chiralität (Händigkeit) gut illustrieren.

Es folgt eine kurze Einführung in Prinzipien der Quantenfeldtheorie, speziell der Quantenelektrodynamik (QED) – die natürlich einen ausführlichen Kurs über dieses Thema keinesfalls ersetzen kann und soll. Entsprechendes gilt für das Schlusskapitel zu den Invarianten bei relativistischen Streuprozessen.

Einige Testaufgaben am Ende des Buches sollen als Anreiz dienen, den Stoff dieses Kurses beispielhaft auch selbst nachzurechnen: Die Mehrzahl der Lösungen ist bereits im vorhergehenden Text versteckt.

Dieter Gromes danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts und viele präzise Verbesserungen. Das ursprüngliche \LaTeX -Skript hat V. Kuchta erstellt und auch aus meinen Tafelskizzen satzfertige Druckvorlagen gemacht. Für die sorgfältige Betreuung des Projekts danke ich außerdem B. Alton, M. Maly und Dr. V. Spillner vom Springer-Verlag. Hinweise auf dennoch verbleibende Ungenauigkeiten und Fehler bitte direkt an mich senden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Verbindung zur nichtrelativistischen Quantenmechanik	17
3	Klein-Gordon-Gleichung	22
3.1	Eigenschaften der KGE	24
3.2	Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern; Eichinvarianz	26
3.3	KGE im Coulomb-Potenzial	29
3.4	Oszillator-Coulomb-Potenzial	37
4	Dirac-Gleichung	41
4.1	Einleitung	41
4.2	Forderungen an die Gleichung; Ableitung der DE	41
4.3	Eigenschaften der Dirac-Matrizen	43
4.4	Dirac-Gleichung in kovarianter Form	45
4.5	Lösungen der freien DE	47
4.6	Kopplung an das elektromagnetische Feld	49
5	Invarianzen der Dirac-Gleichung	60
5.1	Lorentz-Kovarianz	60
5.2	Paritätstransformation P	66
5.3	Ladungskonjugationstransformation C	68
5.4	Zeitumkehrtransformation T	70
6	Lösung der Dirac-Gleichung mit Zentralpotenzial	77
7	Das Klein'sche Paradoxon	90
8	Dirac-Neutrinos: Die Weyl-Gleichung	99

8.1	Einleitung zu Neutrinos	99
8.2	Die Weyl-Gleichung	102
9	Grundzüge der Quantenfeldtheorie	108
9.1	Einführung	108
9.2	Kanonische Quantisierung	113
9.3	Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes . . .	116
10	Elemente der relativistischen Streutheorie	128
11	Testaufgaben zur RQM-Vorlesung	132
12	Bibliographie	141

1 Einleitung

Die **nichtrelativistische Quantenmechanik** beruht auf der Schrödinger-Gleichung, die sich via Korrespondenzprinzip¹ aus dem Hamilton-Formalismus der klassischen Mechanik ableiten läßt. Die Schrödinger-Gleichung

- ist Galilei-invariant (wie die Hamilton-Funktion),
- gilt nur für Teilchengeschwindigkeiten deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c , d. h. $v \ll c$.

Die **relativistische Quantenmechanik** ist dagegen eine **Lorentz²-invariante** Theorie und soll auch die folgenden Situationen korrekt erfassen:

- $v \lesssim c$,
- Wechselwirkung von Licht und Materie,
- $E_{WW} \geq mc^2 \Rightarrow$ Teilchenerzeugung.

Sowohl die detaillierte Beschreibung der Wechselwirkung von Licht und Materie als auch der Teilchenerzeugung erfordern eine Quantisierung des Strahlungsfeldes. Dies ist Aufgabe von Quantenfeldtheorien – speziell der Quantenelektrodynamik (QED, s. Kap. 9) für das elektromagnetische Feld, und der Quantenchromodynamik (QCD) für die starke Wechselwirkung.

Relativistische Wellengleichungen beschreiben Teilchen in einem vorgegebenen Kraftfeld – insbesondere dem elektromagnetischen Feld –, das zunächst noch nicht quantisiert wird.

Eine relativistische Wellengleichung soll dem **Korrespondenzprinzip** genügen und für Teilchen mit **Spin** in nichtrelativistischer Näherung die

¹Klassische Größen werden durch **Operatoren** ersetzt.

²Hendrik A. Lorentz (★1853 Arnheim, †1928 Haarlem).

Pauli-Gleichung ergeben.

Historisch war die erste relativistische Wellengleichung die – ursprünglich von Schrödinger [1] formulierte – **Klein-Gordon-Gleichung** (KGE), deren Eigenschaften von Gordon [2] und Klein [3] im Detail untersucht wurden. Sie beschreibt **Mesonen** mit Spin 0, beispielsweise Pionen. Wegen negativer Wahrscheinlichkeitsdichten (s. Kap. 3) wurde sie zunächst verworfen, jedoch später als Grundlage von Feldtheorien für **skalare Mesonfelder** etabliert.

Erst die von **Paul Dirac**³ aufgestellte Gleichung (DE, [4]) beschreibt Teilchen mit Spin 1/2 (Fermionen, speziell das Elektron). Wie die Klein-Gordon-Gleichung hat die Dirac-Gleichung Lösungen mit negativer Energie. Dirac hat deshalb 1930 postuliert, dass diese Zustände alle besetzt sind, so dass für Fermionen als Folge des Pauli-Prinzips keine Übergänge in diese Zustände möglich sind. Löcher in diesem **Dirac-See** entsprechen dann **Antiteilchen** mit entgegengesetzter Ladung [5].

Zunächst hielt man das Proton für das Antiteilchen des Elektrons, denn das waren 1930 die einzigen bekannten Elementarteilchen. Dirac versuchte ursprünglich die Massendifferenz e/p auf die Wechselwirkung mit dem See zurückzuführen. Bald darauf zeigte der Mathematiker Weyl jedoch [6], dass die Löchertheorie vollständig symmetrisch für negative und positive Ladungen ist. Dirac modifizierte daraufhin seine Theorie und postulierte 1931 als neues Teilchen das **Antielektron** [7]. Es wurde im Jahr darauf von Anderson in der kosmischen Strahlung entdeckt [8] und beseitigte die damals noch bestehenden Zweifel an der Dirac-Theorie. Der Name **Positron** stammt ebenfalls von Anderson [9].

Erst viel später wurden u. a. von Wess und Zumino [10] die Konsequenzen der Supersymmetrie für die Teilchenphysik untersucht. Diese Symmetrieoperation verknüpft Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem

³Paul Adrien Maurice Dirac (★1902 Bristol, †1984 Tallahassee).

Spin) und Fermionen (Teilchen mit halbzahligen Spin) – woraus die Existenz neuer, supersymmetrischer Teilchen folgt: eine kühne, mit der Dirac'schen Voraussage von Antiteilchen in mancher Hinsicht vergleichbare Idee, die jedoch bis heute auf experimentelle Bestätigung wartet.

Supersymmetrische Teilchen könnten als *Weakly Interacting Massive Particles* (WIMPS) Bestandteile der dunklen Materie im Universum sein, und auch am Large Hadron Collider LHC des CERN in Genf wird mit hohem Aufwand nach ihnen gesucht – bisher jedoch ohne jeden Erfolg [11]. Die Symmetrie muss demnach – sofern sie überhaupt in der Natur existiert – gebrochen sein, aber über den Brechungsmechanismus ist derzeit zu wenig bekannt, um genauere Voraussagen machen zu können.

In der **relativistischen Quantenmechanik** wird zwar der Hamilton-Operator modifiziert, die Axiome der Quantentheorie bleiben jedoch ungeändert:

- Der **Zustand** eines Systems wird durch einen **Zustandsvektor** in einem linearen Raum – dem **Hilbert-Raum** – beschrieben, $|\psi\rangle$.
- **Observable** werden durch **hermitesche Operatoren** dargestellt.
- Der **Mittelwert** einer Observablen im Zustand $|\psi\rangle$ ist $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ (Erwartungswert).
- Bei einer **Messung von A** geht der ursprüngliche Zustand in einen **Eigenzustand** $|n\rangle$ von A mit **Eigenwert** a_n über, $A |n\rangle = a_n |n\rangle$.

Es folgt eine Einführung in die verwendete Notation, dann untersuchen wir die Eigenschaften der Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung jeweils mit der Interpretation als Einteilchen-Wellengleichung. Die Lösungen sind auch Basiszustände bei der Entwicklung der Feldoperatoren.

Notation: Einheiten

Die Grundgleichungen werden mit \hbar, c eingeführt. Später setzen wir $\hbar \equiv c \equiv 1$, so dass die Zeit die Dimension einer Länge hat; Energien, Impulse und Massen haben die Dimensionen einer inversen Länge, Ladungen werden dimensionslos

$$e^2 \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137} \quad \text{mit } \hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 6,582 \cdot 10^{-22} \text{ MeVs.}$$

Der Wert der Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstanten $\alpha \equiv e^2$ beträgt $\alpha = 1/137,035999074(44)$ bei verschwindendem Impulsübertrag [12]. In der Teilchenphysik hängt die Kopplungskonstante auch von der Energie ab: Bei Wechselwirkungsenergien bzw. Impulsüberträgen, die der W -Boson-Masse $m_W \simeq 80,385 \text{ GeV}/c^2$ entsprechen, ist $\alpha \simeq 1/128$. Spektroskopische Untersuchungen sind jedoch durch Energien im Elektronenvoltbereich charakterisiert, und hier ist die Energieabhängigkeit von α vernachlässigbar.

Koordinaten

Ein Zeitpunkt t und ein Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ im Ortsraum definieren einen Raum-Zeit-Punkt (x^0, x^1, x^2, x^3) mit $x^0 = ct$ Zeitkoordinate, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ Raumkoordinaten.

Die Indizes $0, 1, 2, 3$ kennzeichnen Komponenten von Vierervektoren, (griechische Buchstaben μ, ν, \dots), $1, 2, 3$ die Komponenten des gewöhnlichen Raumes (lat. Buchstaben i, k, l, \dots):

$$x^\mu \equiv (x^0, x^k) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Metrischer Tensor, ko- und kontravariante Vektoren

Die Metrik im Raum-Zeit-Kontinuum ist durch den metrischen Tensor definiert

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{kk} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu \neq \nu.$$

Man unterscheidet sogenannte

kovariante Vektoren (a_μ): transformieren wie $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

kontravariante Vektoren (a^μ): transformieren wie x^μ

⇒ unterschiedliche Vorzeichen der räumlichen Komponenten. Umwandlung durch Anwendung des metrischen Tensors:

$$a_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu, \text{ so dass}$$

$$a_0 = a^0, \quad a_k = -a^k.$$

Einstein'sche Summenkonvention

Über doppelt erscheinende Indizes wird summiert:

$$\Rightarrow a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$\Rightarrow \text{Hinaufziehen der Indizes: } a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

$$\text{mit } g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Es ist $g_\mu{}^\nu = g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta_\mu{}^\nu$

mit dem Kronecker-Symbol $\delta_\mu{}^\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$

Dreier- und Vierervektoren, Skalarprodukt

Für Dreiervektoren im gewöhnlichen Ortsraum verwenden wir $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, so dass

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a}) \quad \text{mit} \quad a^1 = a_x, \quad a^2 = a_y, \quad a^3 = a_z.$$

Skalarprodukt/Betrag Dreiervektor:

$$a = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2} = [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2]^{1/2}.$$

Oft wird beim Vierervektor a^μ der Index μ weggelassen $\Rightarrow a$, wenn eine Verwechslung mit dem Betrag des Dreiervektors ausgeschlossen ist.

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren a^μ, b^μ erhält man durch Verjüngung aus den jeweiligen ko- und kontravarianten Komponenten:

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$s^2 \equiv a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - a^2 \quad \text{ist die Norm von} \quad a \equiv a^\mu.$$

Klassifizierung der Vierervektoren

$$a_\mu a^\mu < 0, \quad a^\mu \quad \text{raumartig,}$$

$$a_\mu a^\mu = 0, \quad a^\mu \quad \text{Nullvektor (lichtartig),}$$

$$a_\mu a^\mu > 0, \quad a^\mu \quad \text{zeitartig.}$$

Dies entspricht der Lage des Vektors relativ zum Lichtkegel (Abb. 1.1).

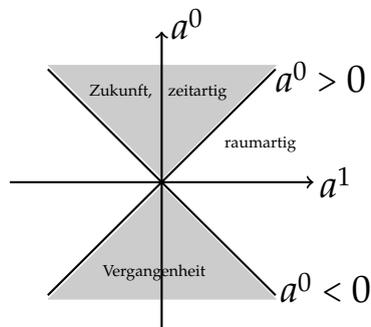


Abb. 1.1: Minkowski-Diagramm

Gradient, Differenzialoperatoren

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{Nabla-Operator}$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Laplace- oder Delta-Operator.}$$

Die vier partiellen Differenzialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ bilden einen kovarianten Vektor:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial ct'}, \vec{\nabla} \right), \quad \text{Gradientenoperator.}$$

Der entsprechende kontravariante Gradient ist

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial ct'}, -\vec{\nabla} \right).$$

Der **d'Alembert-Operator** ist

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu.$$

Der $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ -Tensor (**Levi-Civita-Tensor**)

ist ein in den vier Indizes total antisymmetrischer Tensor:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1, & (\mu\nu\lambda\rho) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0, & \text{mindestens zwei gleiche Indizes} \\ -1, & (\mu\nu\lambda\rho) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3). \end{cases}$$

Elektromagnetisches Feld

Das elektromagnetische Potenzial besteht aus einem Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und einem skalaren Potenzial $\phi(\vec{r}, t)$, die einen Vierervektor bilden:

$$(A^\mu) \equiv (\phi, \vec{A}); \quad (j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \quad \text{mit} \quad \partial_\mu j^\mu = 0.$$

$$\text{Elektrisches Feld:} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^0}$$

$$\text{Magnetisches Feld:} \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Die Komponenten von \vec{E} und \vec{B} bilden einen antisymmetrischen Tensor $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ im Raum-Zeit-Kontinuum:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

so dass (im Vakuum)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Sp}(F^{\mu\nu}) = 0.$$

Daraus folgen die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}; \quad \text{in Lorenz-Eichung}^4 \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

und die **homogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}.$$

⁴Ludvig Lorenz (*1829 Helsingør, †1891 Frederiksberg).

Lorentz-Transformation (LT)

Beim Wechsel des Bezugssystems durch LT werden die Koordinaten **linear** und **reell** so transformiert, dass das Quadrat des Abstandes zweier Raum-Zeit-Punkte erhalten bleibt

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} + a_{\mu}.$$

Der reelle Vektor a^{μ} ist eine einfache Translation der Raum-Zeit-Achsen.

Homogene LT mit $a^{\mu} = 0$:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Definition der LT durch:

(1) $\Lambda_{\mu\nu}^* = \Lambda_{\mu\nu}$ **reelle** Transformation

(2) $\Lambda_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\lambda} = \Lambda_{\nu\mu} \Lambda^{\lambda\mu} = \delta_{\nu}^{\lambda}$ **Erhaltung des Abstandsquadrates**

$\Rightarrow \det|\Lambda^{\mu}_{\nu}| = \pm 1$ (+1: eigentliche LT; Richtungssinn der Raumachsen bleibt gleich).

Inverse Transformation: $x^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x'^{\nu}$.

Die (homogene) **Lorentz-Gruppe** ist die Gruppe der **linearen reellen** Transformation, bei denen die Skalarprodukte zwischen Vierervektoren erhalten bleiben.

Literatur

- [1] Schrödinger, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. Annalen Phys. 81, 109 (1926)
- [2] Gordon, W.: Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. Z. Physik 40, 117 (1926)
- [3] Klein, O.: Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. Z. Physik 41, 407 (1927)

- [4] Dirac, P.A.M.: The quantum theory of the electron. Proc. Roy. Soc. A117, 610 (1928)
- [5] Dirac, P.A.M.: A theory of electrons and protons. Proc. Roy. Soc. A126, 360 (1930)
- [6] Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel, Leipzig; 2. Auflage p. 234 (1931)
- [7] Dirac, P.A.M.: Quantised singularities in the electromagnetic field. Proc. Roy. Soc. A133, 60 (1931)
- [8] Anderson, C.D.: The apparent existence of easily deflectable positives. Science 76, 238 (1932)
- [9] Anderson, C.D.: The positive electron. Phys. Rev. 43, 491 (1933)
- [10] Wess, J., Zumino, B.: Supergauge Transformations in Four Dimensions. Nucl. Phys. B 70, 39 (1974)
- [11] Chatrchyan, S. et al. (CMS Collaboration): Search for supersymmetry with razor variables in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. Phys. Rev. D 90, 112001 (2014)
- [12] Olive, K.A. et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics. Chin. Phys. C 38, 090001 (2014)

2 Verbindung zur nichtrelativistischen Quantenmechanik

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird die Zeitentwicklung von Zuständen $|\psi\rangle$ durch die **Schrödinger-Gleichung** (SE) bestimmt [1]:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle} \quad (\text{SE}).$$

Die unabhängig und etwa ein Jahr früher formulierte Quantenmechanik von Heisenberg [2], Born und Jordan [3, 4] hatte sich als mathematisch äquivalent erwiesen. Für ein freies Teilchen in Ortsdarstellung gilt damit für die Zeit- und Ortsabhängigkeit seiner Wellenfunktion $\langle \vec{r} | \psi \rangle = \psi(\vec{r}, t)$ die lineare Differenzialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}, t).$$

- (1) Wegen der unterschiedlichen Ordnungen der zeitlichen und räumlichen Ableitungen ist die SE **nicht Lorentz-kovariant** ($\hat{=}$ nicht relativistisch invariant gegenüber LT): Ihre Struktur ändert sich beim Übergang von einem Inertialsystem durch LT in ein anderes.
- (2) Die SE beschreibt nicht den Eigendrehimpuls eines Teilchens, z. B. den Spin des Elektrons. Für nichtrelativistische Elektronen lässt sich dieser Mangel durch das Rezept von Pauli beheben [5]: Die Wellenfunktion ψ wird durch eine zweikomponentige Wellenfunktion ersetzt,

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

mit $|\psi_i(\vec{r}, t)|^2 d^3r$, $i = 1, 2$, der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit Spin in positiver ($i = 1$) oder negativer ($i = 2$) z -Richtung im Volumenelement d^3r um den Punkt \vec{r} zur Zeit t zu finden.

Der Drehimpulsoperator \vec{j} setzt sich aus den Operatoren \vec{L} des Bahndrehimpulses, und $\vec{\sigma}/2$ des Spins zusammen:

$$\vec{j} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \quad \text{Gesamtdrehimpulsoperator mit } \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix}$$

und den **Paulischen Spinmatrizen**

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\vec{L} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}, \quad \text{Bahndrehimpulsoperator.}$$

Die so modifizierte Schrödinger-Theorie ist jedoch **nicht relativistisch invariant**. Ziel ist deshalb, eine relativistisch invariante Gleichung zu finden, die den Spin automatisch mitberücksichtigt.

Zum Aufstellen von relativistischen oder nicht relativistischen Wellengleichungen benutzt man das **Korrespondenzprinzip**, d. h. klassische Größen werden durch Operatoren ersetzt:

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} = -i\hbar\vec{\nabla} \end{array}$$

Damit ergibt sich aus der nichtrelativistischen Energie eines freien Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

die freie zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} |\psi\rangle.$$

In der **speziellen Relativitätstheorie** transformieren Energie E und Impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ als Komponenten eines kontravarianten Vierervektors

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right).$$

Die kovarianten Komponenten sind

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right).$$

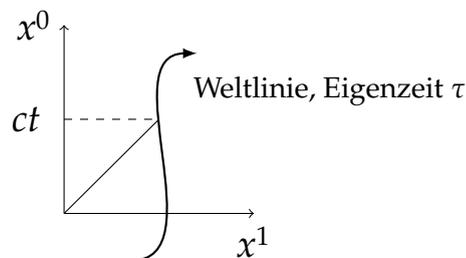
⇒ Das invariante Skalarprodukt ist

$$\boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2} \quad \text{mit der Ruhemasse } m.$$

Ableitung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

Wir betrachten in Abb. 2.1 den Ort eines klassischen relativistischen Punktteilchens der Masse $m > 0$ im Minkowski-Raum: $x(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$ mit der **Zeit t im Inertialsystem** und der **Eigenzeit τ** als Parameter auf der Weltlinie. Dabei ist τ die Zeit, die eine mit dem Teilchen bewegte Uhr anzeigt.

Abb. 2.1: Weltlinie eines Teilchens in Parameterdarstellung



Im momentanen Ruhesystem des Teilchens gilt für das Differenzial der Weltlinie

$$dx' = \begin{pmatrix} cd\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Invarianz des relativistischen Abstandsquadrats ist

$$(dx')^2 = c^2 d\tau^2 = (dx)^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)$$

wobei $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t)$.

Der Zusammenhang zwischen τ und t wird

$$\tau = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}}; \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Vierergeschwindigkeit u und **Viererimpuls** p sind definiert durch

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} c \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}/c \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p^\mu \equiv mu^\mu = m \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Im **nichtrelativistischen Grenzfall** $v \ll c$ gehen diese Ausdrücke in die gewöhnlichen Formeln für Energie und Impuls über – jedoch muss die Ruheenergie berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &\xrightarrow{v \ll c} 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \\ \Rightarrow \frac{E}{c} &\rightarrow mc + \frac{1}{2} mc \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{E \rightarrow mc^2 + \frac{1}{2} m v^2} \\ \vec{p} &\rightarrow m\vec{v}. \end{aligned}$$

Das **invariante Skalarprodukt** für den Viererimpuls ergibt demnach

$$\boxed{p_{\mu}p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4}.$$

Literatur

- [1] Schrödinger, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. Annalen Phys. 79, 361 und 489 (1926)
- [2] Heisenberg, W.: Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. Z. Phys. 33, 879 (1925)
- [3] Born, M., Jordan, P.: Zur Quantenmechanik [I]. Z. Phys. 34, 858 (1925)
- [4] Born, M., Jordan, P.: Zur Quantenmechanik [II]. Z. Phys. 35, 557 (1926)
- [5] Pauli, W.: Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. Z. Physik 43, 601 (1927)

3 Klein-Gordon-Gleichung

Als relativistische Feldgleichung bestimmt die Klein-Gordon-Gleichung die Kinematik freier skalarer Felder (Mesonenfelder mit Spin 0). Die KGE ist eine homogene partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die unter Lorentz-Transformation forminvariant (relativistisch kovariant) ist. Wir untersuchen sie hier zunächst als Gleichung für ein freies Spin-0-Teilchen, später für ein Meson im elektromagnetischen Feld, beispielsweise ein negatives Pion im Coulomb-Feld eines Kerns.

Wenden wir das Korrespondenzprinzip

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}; \quad p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu$$

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \rightarrow i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla} \right)$$

auf die relativistische Energie-Impuls-Beziehung an,

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

erhalten wir die Wellengleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4} |\psi\rangle}.$$

Die Wurzel birgt jedoch Probleme: Ihre Entwicklung ergibt Ableitungen von bis zu unendlich hoher Ordnung, Ort und Zeit treten also unsymmetrisch auf und die relativistische Invarianz wird – bei endlicher Anzahl von Termen – **gebrochen**.

Wir gehen deshalb von der quadratischen Relation aus

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4,$$

und erhalten

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\psi\rangle = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4) |\psi\rangle$$

mit jeweils zweiter Ableitung in Ort und Zeit. Division durch $-(\hbar^2 c^2)$ ergibt die offensichtlich Lorentz-kovariante Form

$$\boxed{\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] |\psi\rangle = 0}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x}),$$

denn aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass der **d'Alembert-Operator**

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\nu}$$

invariant gegenüber LT ist.

In der Wellengleichung erscheint die reduzierte Compton-Wellenlänge des Teilchens mit Masse m – z. B. des Pions –

$$\frac{\hbar}{mc} \equiv \lambda_c, \quad \lambda_c^\pi \simeq 1,414 \cdot 10^{-15} \text{ m.}$$

Man nennt die von Schrödinger, Gordon und Klein aufgestellte Gleichung

$$\boxed{\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] |\psi\rangle = 0} \quad \text{freie Klein-Gordon-Gleichung (KGE).}$$

E. Schrödinger hat sie 1926 als relativistische Verallgemeinerung der SE vorgeschlagen, O. Klein und W. Gordon haben sie im Detail untersucht (s. Referenzen in der Einleitung).

Mit dem Viererimpuls als Operator $p^\mu \hat{=} i\hbar \partial^\mu$ lässt sie sich auch schreiben als

$$\boxed{[p_\mu p^\mu - m^2 c^2] |\psi\rangle = 0}.$$

3.1 Eigenschaften der KGE

Sie erfüllt die **Kontinuitätsgleichung**; zur Herleitung aus der KGE bildet man

$$\psi^* \left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0$$

und subtrahiert die komplex konjugierte Gleichung

$$\begin{aligned} \psi \left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* &= 0 \\ \Rightarrow \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* &= 0 \\ \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) &= 0. \end{aligned}$$

Damit die Stromdichte der nichtrelativistischen entspricht, multiplizieren wir mit $-\frac{\hbar}{2mi}$, und wegen $\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \vec{\nabla} \right)$, $\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, -\vec{\nabla} \right)$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*] = 0.$$

Dies hat die Form einer Kontinuitätsgleichung ($\dot{\rho} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t}$)

$$\boxed{\dot{\rho}_s + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0} \text{ mit der Dichte}$$

$$\rho_s = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] \text{ und der Stromdichte}$$

$$\vec{j}_s = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*]$$

bzw. in kovarianter Notation mit der Viererstromdichte $j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}.$$

In relativistischer Formulierung wird die **Normierung** meist so gewählt, dass

$$\rho_{\text{KG}} = i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad j_{\text{KG}}^\mu \equiv -i\hbar c^2 (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

und mit dem Energieeigenzustand

$$\psi = \varphi(\vec{x}) e^{-iEt/\hbar}$$

lässt sich die Dichte schreiben als

$$\rho_{\text{KG}} = 2E |\Psi|^2.$$

Die Verbindung zum Schrödinger-Strom ist dann gegeben durch

$$\vec{j}_s = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) = \frac{1}{2mc^2} \vec{j}_{\text{KG}}.$$

Als Folge der **zweiten Zeitableitung** in der KGE ist ρ nicht positiv definit und daher keine Wahrscheinlichkeitsdichte; $e \cdot \rho(\vec{x}, t)$ kann jedoch als **Ladungsdichte** interpretiert werden.

(Bei einer DGL zweiter Ordnung wie der KGE können die Anfangswerte von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ **unabhängig** voneinander vorgegeben werden, so dass $\rho(\vec{x})$ positiv oder negativ sein kann).

Freie Lösungen der KGE

Es existieren zwei freie Lösungen in Form von ebenen Wellen:

$$\psi_{\pm}(\vec{x}, t) = e^{-i(E_{\pm}t - \vec{p}\vec{x})/\hbar}$$

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Es treten **positive** und **negative** Energien auf. Die Energie ist **nicht** nach unten beschränkt. Die Theorie ist **skalar**, sie enthält keinen Spin und

kann nur Mesonen mit Spin 0 (z. B. π^0, π^\pm) beschreiben. Als Quantenfeldtheorie beschreibt die KGE Mesonenfelder; das hermitesche skalare Klein-Gordon-Feld beschreibt neutrale Mesonen mit Spin 0.

Im Rahmen der RQM lässt sich das KGE-Problem negativer Energien ($\hat{=}$ Massen im feldfreien Fall) umgehen, indem man die Interpretation des Vierervektors j^μ ändert:

$$j^\mu \rightarrow ej^\mu(x) \equiv \text{Stromdichte} - \text{Vierervektor, d. h. insbesondere}$$

$$\varrho \rightarrow e\varrho(x) \equiv \text{elektrische Ladungsdichte; } \varrho \text{ nicht positiv definit.}$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

beschreibt dann die **Ladungserhaltung**, während die Teilchenzahl nicht erhalten ist [1]. In einer solchen Formulierung können Teilchenpaare mit entgegengesetzter Ladung erzeugt und vernichtet werden. Mit dieser Interpretation ist die KGE keine Einteilchentheorie mehr, sondern eine Theorie der Ladung.

(Erst mit der Dirac-Theorie kann eine **positiv definite Dichte** für ein Teilchen eingeführt werden; auch dort bleiben jedoch negative Energien, so dass die Einteilcheninterpretation nur begrenzt möglich ist).

3.2 Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern; Eichinvarianz

Die WW eines relativistischen Spin-0-Teilchens mit einem elektromagnetischen Feld wird in der KGE wie in der SE durch **minimale Kopplung** berücksichtigt:

$$\left. \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \\ \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \end{array} \right\} p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

mit der Ladung e des Teilchens und dem elektromagnetischen Viererpotential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad A^0 = \phi.$$

Damit wird die KGE mit elektromagnetischen Feld:

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right)^2 - c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m^2 c^4 \right] |\psi\rangle = 0$$

bzw. in kovarianter Form (Massenterm $m^2 c^2$)

$$\boxed{\left[\left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) - m^2 c^2 \right] |\psi\rangle = 0.}$$

Die **Maxwell'schen Gleichungen** sind invariant unter lokalen Eichtransformationen der Art

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

bzw.

$$\boxed{A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi}$$

mit $\chi = \chi(x)$ eine beliebige reelle skalare Funktion der Raum-Zeit-Koordinaten.

Diese **lokale Eichinvarianz** lässt sich wie in der nichtrelativistischen Theorie auf die KGE übertragen, indem man die Wellenfunktion ψ durch Multiplikation einer Phase geeignet mittransformiert:

$$\boxed{\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \psi(x).}$$

Um $\Lambda(x)$ zu finden, setzen wir die gestrichenen Größen in die KGE ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(p_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu - \frac{e}{c} \partial_\mu \chi \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu - \frac{e}{c} \partial^\mu \chi \right) - m^2 c^2 \right] \cdot \psi' e^{-i\Lambda} \\ &= \left[\left(p_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu - \frac{e}{c} \partial_\mu \chi \right) e^{-i\Lambda} \left(p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu - \frac{e}{c} \partial^\mu \chi + \hbar \partial^\mu \Lambda \right) - m^2 c^2 e^{-i\Lambda} \right] \psi' \\ &= e^{-i\Lambda} \left[\left(p_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu - \frac{e}{c} \partial_\mu \chi + \hbar \partial_\mu \Lambda \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu - \frac{e}{c} \partial^\mu \chi + \hbar \partial^\mu \Lambda \right) - m^2 c^2 \right] \psi'. \end{aligned}$$

⇒ Mit der Wahl $\Lambda(x) = \frac{e}{\hbar c} \chi(x)$ geht dies in die Form der KGE über,

$$\left[\left(p_\mu - \frac{e}{c} A'_\mu \right) \left(p^\mu - \frac{e}{c} A'^\mu \right) - m^2 c^2 \right] \psi' = 0 \quad (\text{Beweis durch Nachrechnen}).$$

Da physikalische Observable durch Erwartungswerte $\langle \psi | \dots | \psi \rangle$ dargestellt werden, spielt ein Phasenfaktor $\Lambda(x)$ in ψ keine Rolle: Die KGE mit minimaler Kopplung ist deshalb unter lokalen Eichtransformationen des elektromagnetischen Feldes invariant.

Kontinuitätsgleichung mit Feld

Multipliziert man die KGE mit Feld von links mit $\langle \psi^* |$ und subtrahiert davon die komplex konjugierte Gleichung, folgt die Kontinuitätsgleichung als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j}(x) &= 0 \quad \text{mit} \\ \rho(x) &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] - \frac{e}{mc^2} A^0 \psi^* \psi \\ \vec{j}(x) &= -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] - \frac{e}{mc} \vec{A} \psi^* \psi \end{aligned}$$

(wieder mit dem Faktor $\frac{\hbar}{2mi}$ analog zur nichtrel. QM) bzw. in Lorentz-kovarianter Form

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \text{mit} \quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix},$$

$$\boxed{j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*] - \frac{e}{mc} A^\mu \psi^* \psi}$$

oder in relativistischer Normierung $j_{\text{KG}} = 2mc^2 j_s$:

$$j_{\text{KG}}^\mu = -i\hbar c^2 [\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*] - 2ce A^\mu \psi^* \psi.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt mit dem Gauß'schen Integralsatz

durch Integration über den gesamten Raum der **Erhaltungssatz**

$$Q = \int d^3x \rho(x) = \text{const} \Rightarrow \text{Ladungserhaltung.}$$

Jedoch ist wieder $\rho(x)$ **nicht positiv definit**, da ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial t} \forall t$ willkürliche Werte annehmen können, so dass ρ und \vec{j} nicht als Wahrscheinlichkeitsgrößen interpretiert werden können.

\Rightarrow Suche nach einer relativistischen Wellengleichung von **erster Ordnung** in der Zeit und mit **positiv definiten** Wahrscheinlichkeitsdichte. Dies ist die Dirac-Gleichung, die wir in Kap. 4 diskutieren. Sie hat zwar – wie die KGE – ebenfalls Lösungen mit **negativen Energieeigenwerten**, die sich aber für Fermionen physikalisch sinnvoll interpretieren lassen.

Vorher soll jedoch die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld untersucht und für den einfachen Fall eines sphärischen Potentials analytisch gelöst werden, denn es hat sich gezeigt, dass die Lösungen auch im Rahmen des Einteilchenmodells durchaus physikalische Bedeutung haben: Sie liefern insbesondere eine realistische Beschreibung der Einteilchenenergien und Wellenfunktionen in mesonischen Atomen, die ein negativ geladenes Pion oder Kaon in der Hülle haben.

3.3 KGE im Coulomb-Potenzial

Die KGE mit elektromagnetischem Feld ist

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right)^2 - c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m^2 c^4 \right] \psi = 0.$$

Für zeitunabhängiges \vec{A}, ϕ sind die stationären Lösungen mit positiver Energie

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(\vec{x}), \quad E > 0$$

⇒ zeitunabhängige KGE

$$(E - eA^0)^2 \varphi - c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \varphi - m^2 c^4 \varphi = 0.$$

Für ein sphärisch symmetrisches Potenzial wie das Coulomb-Feld

$$A^0(\vec{x}) \rightarrow A^0(r), \quad r = |\vec{x}|, \quad \text{und} \quad \vec{A} = 0 \text{ folgt}$$

$$\boxed{(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4) eA^0(\vec{x}) = [E - eA^0(r)]^2 \varphi(\vec{x})}.$$

Diese Gleichung ist ein geeigneter Ausgangspunkt, um die Energieeigenwerte und Wellenfunktionen eines Mesons wie beispielsweise des Pions π^- oder des Kaons K^- im Coulombfeld eines Atomkerns mit Protonenzahl Z im Rahmen der Klein-Gordon-Theorie analytisch zu berechnen. (Da Mesonen nicht nur elektromagnetisch, sondern auch stark wechselwirken, wird ein analytisches Resultat im Coulomb-Feld das physikalische Problem noch nicht endgültig lösen).

Wie in der nichtrelativistischen QM wird die Gleichung durch Separationsansatz gelöst; in sphärischen Polarkoordinaten

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad \text{mit Kugelfunktionen } Y_{lm}$$

⇒ Radialgleichung:

$$\left(-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = \frac{(E - eA^0(r))^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} R(r).$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall:

$$E = mc^2 + E'; \quad E' - eA^0 \ll mc^2$$

geht diese Gleichung in die nichtrelativistische radiale Schrödinger-Gleichung über, denn die rechte Seite der Radialgleichung wird mit der nichtrelativistischen Energie E'

$$\frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(mc^2)^2 + 2mc^2(E' - eA^0(r)) + (E' - eA^0(r))^2 - m^2 c^4 \right] R(r) \approx$$

$$\boxed{\frac{2m}{\hbar^2} [E' - eA^0(r)] R(r)}.$$

Die Schrödinger-Gleichung erweist sich also als korrekter nichtrelativistischer Grenzfall der KGE in der Einteilcheninterpretation (eine notwendige, keine hinreichende Bedingung dafür, dass die KGE die korrekte relativistische Gleichung für ein Meson im Kernfeld darstellt – das folgt vielmehr aus deren Invarianzeigenschaften).

Mesonen sind – anders als Elektronen – nicht stabil, sondern kurzlebig. Es soll deshalb zunächst untersucht werden, ob es überhaupt mesonische Energieniveaus im Feld eines Kerns geben kann.

Beispiel: Pion im Coulomb-Feld eines Kerns mit Ladungszahl Z

Wir wollen klären, ob es trotz der endlichen Lebensdauer des Pions stationäre Energieniveaus im Feld des Kerns gibt. Die Basiswerte für eine entsprechende Abschätzung sind die Massen und charakteristischen Zeiten:

$$m_{\pi^-} = 139,57 \text{ MeV}/c^2 \cong 273 m_e.$$

Die klassische Umlaufzeit τ in pionischem Wasserstoff lässt sich aus der Unschärferelation abschätzen. Sie soll mit der mittleren Lebensdauer des Pions $\tau_{\pi^-} \cong 2,60 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ verglichen werden, oder genauer mit der (deutlich kürzeren) Lebensdauer des Pions in tiefliegenden Zuständen mit $n = 1-6$ bei Absorption im Kern durch eine Reaktion $\pi^- + p \rightarrow n$ (a_π Bohr'scher Radius des Pions, a_B des Elektrons):

$$\Delta x \Delta p \equiv a_\pi m_\pi \frac{a_\pi}{\tau} \cong \hbar; \quad a_\pi \cong \frac{m_e}{m_\pi} a_B \cong \frac{1}{273} 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cong 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ m} \cong 180 \text{ fm}$$

$$\Rightarrow \tau \cong \frac{m_\pi a_\pi^2}{\hbar} \cong \frac{139 \cdot 180^2}{197,33} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{23}} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \tau \cong 7,6 \cdot 10^{-20} \text{ s} \ll \tau_{\pi^-} \cong 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

(mit $\hbar \equiv c \equiv 1$: $\text{MeV} \cdot \text{fm} \cong 1/197,33$; $1 \text{ s} \cong 3 \cdot 10^{23} \text{ fm}$).

Die klassische Umlaufzeit des Pions ist also um zwölf Größenordnungen kleiner als die mittlere Lebensdauer des Pions, so dass es stationäre Niveaus geben sollte. Berücksichtigt man jedoch die kürzere Lebensdauer des Pions in gebundenen Zuständen aufgrund der Absorption im Kern,

fällt der Vergleich weniger eindeutig aus, da die entsprechenden mittleren Lebensdauern des Pions durchaus auch im Bereich von 10^{-20} s liegen können. Die experimentellen Daten zeigen jedoch klar, dass es stationäre pionische Niveaus im Kernfeld gibt [3]. Wir wollen sie durch die Lösung der KGE im Feld berechnen.

Das Coulomb-Potenzial des Kerns ist für eine Punktladung Ze

$$eA^0(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

und mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ wird die Radialgleichung

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{d}{dr} r + \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{r^2} - \frac{2Z\alpha E}{\hbar c r} - \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] R = 0.$$

Substituiere: $\sigma^2 = \frac{4(m^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}$, $\gamma = Z\alpha$, $\lambda = \frac{2E\gamma}{\hbar c \sigma}$; $\varrho = \sigma r$

\Rightarrow kompakte Form der Radialgleichung für die neue Variable ϱ :

$$\left[\frac{d^2}{d(\varrho/2)^2} + \frac{2\lambda}{\varrho/2} - 1 - \frac{l(l+1) - \gamma^2}{(\varrho/2)^2} \right] \varrho R(\varrho) = 0.$$

Das ist die Gestalt der nichtrelativistischen SE für die Funktion $u \equiv \varrho R$, wenn wir ersetzen

$$\varrho_0 \rightarrow 2\lambda \quad (\varrho_0 = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \cdot \frac{Ze^2}{\hbar})$$

$l(l+1) \rightarrow l(l+1) - \gamma^2 \equiv l'(l'+1)$ (l' im Allg. nicht ganzzahlig).

Auch in der klassischen relativistischen Mechanik findet sich eine solche Änderung des Zentrifugalterms; dort sind die elliptischen Kepler-Bahnen bei relativistischen Geschwindigkeiten nicht mehr geschlossen, sondern werden zu Rosettenbahnen.

Die Radialgleichung wird analog zum nichtrelativistischen Fall gelöst:

$$R(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{l'} & \varrho \rightarrow 0 \\ e^{-\varrho/2} & \varrho \rightarrow \infty \end{cases}.$$

⇒ Lösungsansatz:

$$\rho R(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{l'+1} e^{-\rho/2} w(\rho/2)$$

mit der DGL für $w(\rho)$ analog zum Schrödinger-Fall:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\overbrace{l'(l'+1)}^{l(l+1)-\gamma^2}}{\rho^2} + \frac{\overbrace{2\lambda}^{\rho_0}}{\rho} - 1 \right] \overbrace{u(\rho)}^{\rho R(\rho)} = 0$$

$$(\rho R(\rho) = u(\rho) = \rho^{l'+1} e^{-\rho} w(\rho))$$

$$\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + 2(l'+1 - \rho) \frac{dw}{d\rho} + (\rho_0 - 2(l'+1))w = 0.$$

Lösung durch Potenzreihenansatz

Wir setzen die Potenzreihe $w(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$

in die radiale Differenzialgleichung ein und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [k(k-1)\rho^{k-1} + 2(l'+1)k\rho^{k-1} - 2k\rho^k + (\rho_0 - 2(l'+1))\rho^k] = 0.$$

Die Koeffizienten jeder Potenz von ρ müssen Null sein, also für ρ^k (mit teilweiser Verschiebung der Indizes $k \rightarrow k+1$):

$$[(k+1)k + 2(l'+1)(k+1)]a_{k+1} + [-2k + (\rho_0 - 2(l'+1))]a_k = 0$$

⇒ Rekursionsrelation zur Berechnung von a_{k+1} aus a_k :

$$a_{k+1} = \frac{2(k+l'+1) - \rho_0}{(k+1)(k+2l'+2)} \cdot a_k.$$

Für die Konvergenz ist das Verhältnis $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ für $k \rightarrow \infty$ relevant:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{k}.$$

Vergleich mit der Exponentialreihe

$$e^{2\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2\rho)^k$$

mit den aufeinanderfolgenden Koeffizienten ergibt

$$\frac{2^{k+1}/(k+1)!}{2^k/k!} = \frac{2}{k+1} \cong \frac{2}{k'}$$

d. h. die Reihe für $w(\rho)$ verhält sich wie $e^{2\rho}$. Damit nicht $u(\rho) \propto e^{-\rho} w(\rho) \rightarrow e^{\rho}$ für große r resultiert – dann wäre $u(\rho)$ nicht normierbar – muss die Reihe **abbrechen**.

Bricht die Reihe nach dem N -ten Glied ab, ist $w(\rho)$ ein Polynom N -ten Grades. Die Abbruchbedingung

$a_{N+1} + a_{N+2} = \dots = 0$ ergibt die Relation

$$\boxed{\rho_0 = 2(N + l' + 1)}, \quad N = 0, 1, 2, \quad \text{radiale Quantenzahl}$$

mit $\rho_0 \rightarrow 2\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = N + l' + 1}$ (bis auf l' analog zum Schrödinger-Fall).

Zur Bestimmung der Energieeigenwerte eliminieren wir σ :

$$\sigma = \frac{2E\gamma}{\hbar c \lambda} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{4E^2\gamma^2}{\hbar^2 c^2 \lambda^2} = \frac{4(m^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}$$

und erhalten die Energieniveaus

$$\boxed{E = mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2}}$$

(positive Wurzel, da $\gamma > 0$, $\lambda > 0 \Rightarrow E > 0$).

\Rightarrow Für verschwindende Anziehung $\gamma = Z\alpha \rightarrow 0$ geht die Energie dieser Lösungen gegen die Ruheenergie,

$$\boxed{E \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} mc^2}.$$

Berechnung von l' aus der Definitionsgleichung

$$l'(l' + 1) = l(l + 1) - \gamma^2$$

$$l' = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(l + 1/2)^2 - \gamma^2}$$

nur + zulässig, damit die kinetische Energie endlich bleibt

$$E_{Nl} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left[N + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - \gamma^2}\right]^2}}}.$$

In nichtrelativistischer Notation ist die Hauptquantenzahl $n = N + l + 1$; damit wird E_{nl} ($n=1,2,\dots; l=0,1,\dots,n-1$)

$$E_{nl} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left[n - (l + 1/2) + \sqrt{(l + 1/2)^2 - \gamma^2}\right]^2}}}.$$

Die in der nichtrelativistischen Theorie vorhandene **Entartung** bezüglich des Drehimpulses ist hier **aufgehoben**.

Entwicklung der Energie in eine Potenzreihe ergibt

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + O(\gamma^6) \right]$$

$$E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} - \underbrace{\frac{R_y}{n^2}}_{\text{nichtrel. Rydberg-Energie}} - \underbrace{\frac{R_y \gamma^2}{n^3} \left(\frac{1}{l + 1/2} - \frac{3}{4n} \right)}_{\text{relativistische Korrektur}} + O(R_y \gamma^4)$$

mit

$$R_y = \frac{mc^2(Z\alpha)^2}{2} = \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} \quad (= 13,6 \text{ eV für } Z = 1, m = m_e).$$

Da die relativistische Korrektur die Entartung in l aufhebt, ergibt sich eine Energiedifferenz:

$$E_{l=0} - E_{l=n-1} = -\frac{4R_y \gamma^2}{n^3} \frac{n-1}{2n-1}.$$

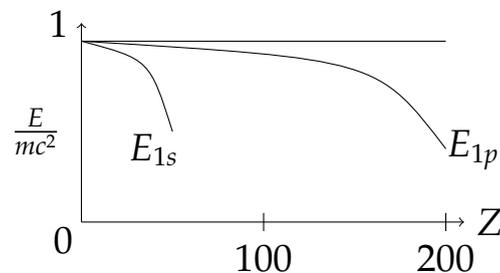
Damit l' und die Energieeigenwerte **reell** sind, muss gelten (s. Ausdruck für l')

$$l + \frac{1}{2} > Z\alpha.$$

Für s -Zustände mit $l = 0$ bedeutet das

$$Z < \frac{1}{2\alpha} \cong \frac{137}{2} = 68,5; \text{ analog für } l = 1 : Z < 205,5.$$

Abb. 3.1: Klein-Gordon-Bindungszustände im Punktladungspotenzial



Für größere Z wird das System instabil, es gibt keine reellen Lösungen zum Coulomb-Potenzial für Punktladungen mit $Z > 68$ für s -Zustände (s. Abb. 3.1). Reale Kerne sind jedoch keine Punktladungen, sie haben einen endlichen Radius, und für das zugehörige Potenzial existieren $l = 0$ Bindungszustände auch für $Z > 68,5$.

Beim Vergleich mit **realen mesonischen Atomen** muss demnach:

- der endliche Kernradius berücksichtigt werden,
- die Masse $m \equiv m_\pi$ durch die reduzierte Masse – mit der Kernmasse M – ersetzt werden, $\mu = \frac{m_\pi \cdot M}{m_\pi + M}$,
- die Vakuumpolarisation berücksichtigt werden (virtuelle Elektron-Positron-Paare),
- die starke Wechselwirkung Pion-Kern abgeschätzt werden.

3.4 Oszillator-Coulomb-Potenzial

Die endliche Ausdehnung des Kerns, die auch für $Z > 68,5$ bei $l = 0$ Bindungszustände ermöglicht und deshalb der wichtigste der vier genannten Effekte ist, lässt sich durch ein Oszillator-Coulomb-Potenzial berücksichtigen (s. Abb. 3.2).

Wir betrachten dazu den Kern näherungsweise als homogen geladene Kugel, mit Potenzial

$$eA^0(r) = V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right); & r \leq R \\ -\frac{Ze^2}{r}; & r > R \end{cases}$$

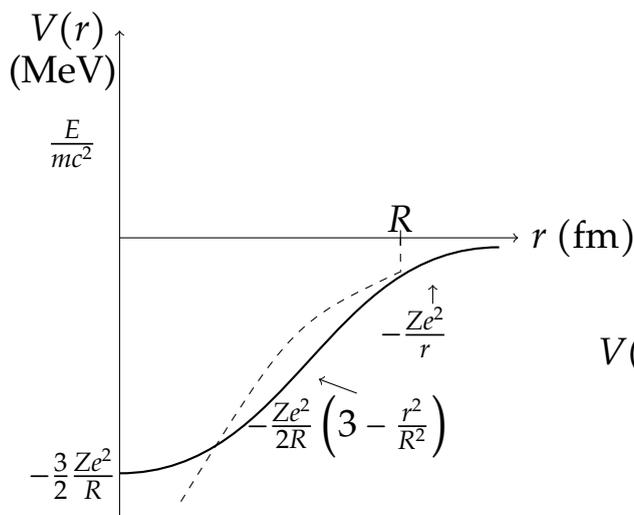


Abb. 3.2: Oszillator-Coulomb-Potenzial

Pb ($Z = 82, A = 208$):

$$V(0) = -\frac{82 \cdot 197}{7,11 \cdot 137} \cdot 1,5 \text{ MeV} \simeq -25 \text{ MeV}$$

$$R = 1,2A^{1/3} \text{ fm} \simeq 7,11 \text{ fm}$$

Die Radialgleichung können wir auch für dieses Potenzial durch Potenzreihenansatz lösen. Es ergibt sich ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen den Zustandsenergien E und der Kernladungszahl Z , und es existieren auch für große Z - und kleine l -Werte gebundene Zustände (s. Abb. 3.3 aus [2] für das Oszillator-Coulomb-Potenzial einer homogen geladenen Kugel mit Radius $R = 10 \text{ fm}$).

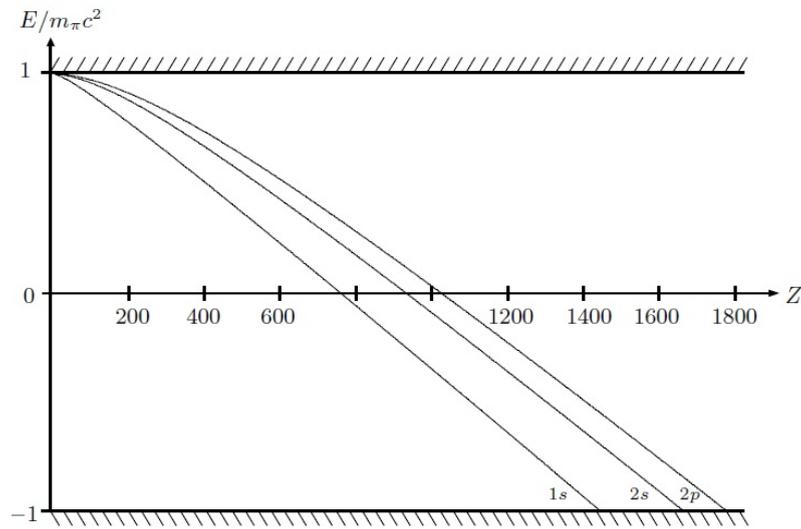


Abb. 3.3: Energieeigenwerte gebundener 1s-, 2s- und 2p-Pionzustände [2]

In Tab. 1 aus [2] sind für zwei verschiedene Kernladungszahlen ($Z = 2$ für Helium und $Z = 1450$ für ein fiktives stark gebundenes System) der Erwartungswert des 1s-Pionradius, $\langle r \rangle_V$, das Oszillator-Coulomb-Potenzial V beim Radius $\langle r \rangle_V$, die Bindungsenergie $E_B = E_{1s} - m_\pi c^2$ sowie die mittlere quadratische Abweichung $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle_V - \langle r \rangle_V^2}$ aufgelistet. Ein Vergleich dieser Werte mit der Ruheenergie $m_\pi c^2 = 139,57$ MeV des Pions und seiner reduzierten Compton-Wellenlänge $\lambda_\pi = 1,41$ fm ergibt bei **schwacher Bindung**

$$Z = 2: \quad |E_B|, \quad |V(\langle r \rangle_V)| \ll m_\pi c^2, \quad \Delta r \gg \lambda_\pi.$$

Tabelle 1: Gebundener 1s-Pionzustand im Oszillator-Coulomb-Potenzial für den schwachen ($Z = 2$) und starken ($Z = 1450$) Bindungsfall, aus Wachter [2]

	$Z = 2$	$Z = 1450$
$\langle r \rangle_V$	146,4 fm	3,7 fm
$V(\langle r \rangle_V)$	-0,02 MeV	-298,9 MeV
E_B	-0,05 MeV	-278,8 MeV
Δr	84,3 fm	1,6 fm

Bei starker Bindung, beispielweise $Z = 1450$ (Tab. 1), gilt jedoch

$$|E_B|, |V(\langle r \rangle_V)| \gg m_\pi c^2, \quad \Delta r \simeq \lambda_\pi.$$

Hier ist demnach das Einteilchenkonzept nicht mehr gültig. Dies lässt sich auch anhand der radialen Ladungsdichte $r^2 \rho(r)$ des $1s$ -Pionzustandes bestätigen: Bei schwacher Bindung ist sie für alle Radien positiv definit. Im Fall starker Bindung hat die radiale Ladungsdichte jedoch keinen einheitlichen Verlauf und geht ab $r \approx 15$ fm in negative Werte über, was mit dem Einteilchenkonzept unvereinbar ist – erst im Rahmen von Quantenfeldtheorien wird die physikalische Bedeutung dieses Vorzeichenwechsels in starken Feldern aufgrund der variablen Teilchenzahl deutlich.

Zur Berechnung mesonischer Eigenzustände und Wellenfunktionen in realistischen Kernfeldern mit $Z \leq 92 - 118$ eröffnet jedoch die Einteilcheninterpretation der KGE einen brauchbaren Zugang. Das Oszillator-Coulomb-Potenzial muss allerdings bei schweren Kernen durch ein realistisches Woods-Saxon-Potenzial ersetzt werden, mit dem die Radialgleichung nicht mehr analytisch, sondern nur noch numerisch gelöst werden kann.

Tiefliegende pionische Zustände wie der $1s$ - und $2p$ -Zustand in pionischem Blei ($Z=82$) wurden in den 1990er Jahren entdeckt [3, 4]. Wegen des großen Überlapps der Pionenwellenfunktion mit der Kerndichteverteilung ist insbesondere der pionische $1s$ -Grundzustand sehr empfindlich auf die genaue Gestalt des Potenzials, das die starke Pion-Kern-Wechselwirkung beschreibt.

Literatur

- [1] Pauli, W., Weisskopf, V.: Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung. *Helv. Phys. Acta* 7, 709 (1934)
- [2] Wachter, A.: *Relativistische Quantenmechanik*, p. 82ff., Springer-Verlag (2005)
- [3] Yamazaki, T. et al.: Discovery of deeply bound pi- states in the Pb-208 (d, He-3) reaction. *Z. Phys. A* 355, 219 (1996)
- [4] Itahashi, K. et al.: Deeply bound pi- states in Pb-207 formed in the Pb-208(d, He-3) reaction Part II: Deduced binding energies and widths and the pion-nucleus interaction. *Phys. Rev. C* 62, 025202 (2000)

4 Dirac-Gleichung

4.1 Einleitung

Um die mit der KGE verbundenen Schwierigkeiten zu vermeiden – insbesondere die nicht positiv-definite Dichte –, suchte Dirac nach einer in den zeitlichen und örtlichen Ableitungen **linearen** Gleichung für ψ [1] (weitere Referenzen s. Einleitung):

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_D \psi}$$

mit dem Dirac-Operator

$$\boxed{H_D = \frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \equiv c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2}$$

und

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad N\text{-komponentiger Spaltenvektor.}$$

Bei korrekter Wahl von α^k ($k = 1, 2, 3$; summiere über doppelte Indizes) und β die DE ergibt sich daraus die Dirac-Gleichung.

Da die Gleichung von erster Ordnung in der Zeit ist, bleibt die **Dichte positiv**; wegen der Forderung **relativistischer Invarianz** dürfen dann auch die **räumlichen Ableitungen** nur von erster Ordnung sein.

Damit H_D **hermitesch** ist ($H_D = H_D^\dagger$) müssen α^k und β hermitesche $N \times N$ Matrizen sein (nicht einfach Zahlen, da die Gleichung dann nicht forminvariant bei räumlichen Drehungen ist).

4.2 Forderungen an die Gleichung; Ableitung der DE

- (1) Die Komponenten ψ_1, \dots, ψ_N von ψ müssen die **KGE erfüllen**, so dass für ebene Wellen als Lösungen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ gilt.

(2) Es gibt einen **erhaltenen** Viererstrom, dessen nullte Komponente eine positive Dichte ist; es gilt die Kontinuitätsgleichung.

(3) Die Gleichung muss Lorentz-kovariant sein.

Aus den Bedingungen (1), (2), (3) folgt die Dirac-Gleichung.

Konsequenzen dieser Bedingungen:

zu (1): zweimalige Anwendung von H_D ergibt

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) \partial_i \partial_j \psi \\ + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^3 (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \partial_i \psi + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

(der erste Term auf der rechten Seite der oberen Gleichung wurde wegen $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ symmetrisiert).

Division durch $(\hbar^2 c^2)$ und Vergleich mit der KGE,

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0,$$

ergibt drei Bedingungen an die α^k , β mit der Einheitsmatrix \mathbb{I} :

$$(*) \quad \left. \begin{aligned} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 2\delta^{ij} \cdot \mathbb{I} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i &= 0 \\ (\alpha^i)^2 &= \beta^2 = \mathbb{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Forderungen an die algebraische} \\ \text{Struktur der Dirac-Matrizen.} \end{array}$$

zu (2): Definiere den zu ψ adjungierten Zeilenvektor $\psi^+ \equiv (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$.

Multipliziere die DE von links mit ψ^+

$$\Rightarrow i\hbar \psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \psi^+ \alpha^k \partial_k \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi.$$

Die dazu komplex konjugierte Relation wird

$$-i\hbar \cdot \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_k \psi^+) \alpha^{k+} \psi + mc^2 \psi^+ \beta^+ \psi,$$

und die Differenz beider Gleichungen multipliziert mit $(-i/\hbar)$ ergibt
 (mit $\frac{\partial}{\partial t}\psi^+\psi = \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^+}{\partial t}$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^+\psi = -c[(\partial_k\psi^+)\alpha^{k+}\psi + \psi^+\alpha^k\partial_k\psi] + \frac{imc^2}{\hbar}(\psi^+\beta^+\psi - \psi^+\beta\psi). \quad (**)$$

Damit dieser Ausdruck die Form einer Kontinuitätsgleichung erhält,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0},$$

müssen die Matrizen α^k , β hermitesch sein:

$$(\alpha^k)^+ = \alpha^k; \quad \beta^+ = \beta \Rightarrow \text{letzter Term in (**) fällt weg,}$$

und mit der Dichte ϱ und der Stromdichte (j^0, j^k)

$$\begin{aligned} \varrho &\equiv \psi^+\psi \equiv \sum_{n=1}^N \psi_n^* \psi_n, \\ j^0 &\equiv c\varrho, \quad j^k \equiv c\psi^+\alpha^k\psi \end{aligned}$$

ist die KG erfüllt; in kovarianter Form mit $j^\mu \equiv (j^0, j^k)$, $k = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}j^0 + \frac{\partial}{\partial x^k}j^k = 0}.$$

4.3 Eigenschaften der Dirac-Matrizen

Die Matrizen α^k , β antikommutieren:

$$\begin{aligned} \{\alpha^k, \beta\} &= 0; \quad \text{ihr Quadrat ist } \mathbb{I}: \\ (\alpha^k)^2 &= \beta^2 = \mathbb{I} \Rightarrow \text{Eigenwerte } \pm 1. \end{aligned}$$

Schreibe diese Bedingung als

$$\alpha^k\beta^2 \equiv \alpha^k = -\beta\alpha^k\beta \quad (\alpha^k\beta = -\beta\alpha^k)$$

und benutze die zyklische Invarianz der Spur (d. h. $Sp(AB) = Sp(BA)$ für quadratische Matrizen A, B),

$$Sp(\alpha^k) = -Sp(\beta\alpha^k\beta) = -Sp(\alpha^k\beta^2) = -Sp(\alpha^k) = 0, \quad \text{und analog für } \beta$$

$$\Rightarrow Sp(\alpha^k) = Sp(\beta) = 0.$$

\Rightarrow Die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte muss gleich sein.

\Rightarrow N ist geradzahlig.

Annahme: $N = 2 \Rightarrow$ nicht möglich, denn die Basis der vier 2×2 -Matrizen $\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ enthält nur drei antikommutierende Matrizen, wir brauchen jedoch vier.

$N = 4$ ist demnach die kleinstmögliche Dimension, in der die geforderte algebraische Struktur realisierbar ist.

Eine spezielle Darstellung (Dirac-Darstellung) der Matrizen ist

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und der Einheitsmatrix $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die algebraischen Beziehungen (*) lassen sich leicht testen, z. B. ist die zweite Bedingung in (*):

$$\alpha^k\beta + \beta\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Darstellung ist die Standarddarstellung der DE. ψ heißt Vierspinor oder einfach Spinor, ψ^+ der **hermitesch adjungierte** Spinor. Sie haben spezifische Transformationseigenschaften unter LT.

4.4 Dirac-Gleichung in kovarianter Form

Anstelle der α - und β -Matrizen sollen jetzt die (kovarianten) γ -Matrizen eingeführt werden [2, 3]. Wir gehen von der Dirac-Gleichung mit α - und β -Matrizen aus. Um zeitliche und räumliche Ableitungen in kovarianter Schreibweise zusammenzufassen, multiplizieren wir zunächst die DE mit β/c

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi - \underbrace{\left[\frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta mc^2 \right]}_{H_D} \psi = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{\beta}{c} \right)$$

$$[-i\hbar \beta \partial_0 - i\hbar \beta \alpha^k \partial_k + mc] \psi = 0 \quad (\text{mit } \partial_0 = \partial/(c\partial t)).$$

Definiere neue Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^k \equiv \beta \alpha^k$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) γ^0 hermitesch, $\gamma^0 = (\gamma^0)^+$, $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$
- (2) γ^k antihermitesch, $(\gamma^k)^+ = -\gamma^k$; $(\gamma^k)^2 = -\mathbb{I}$

Beweis:

$$(\gamma^k)^+ = (\beta \alpha^k)^+ = \alpha^k \beta = -\beta \alpha^k = -\gamma^k$$

$$(\gamma^k)^2 = \beta \alpha^k \cdot \beta \alpha^k = -\beta \beta \alpha^k \alpha^k = -\mathbb{I}.$$

Diese Relationen ergeben zusammen mit den folgenden Antikommutationsrelationen ($k = 1, 2, 3$)

$$\{\gamma^0, \gamma^k\} \equiv \gamma^0 \gamma^k + \gamma^k \gamma^0 = \beta \beta \alpha^k + \underbrace{\beta \alpha^k \beta}_{-\beta \alpha^k} = 0$$

$$\{\gamma^k, \gamma^l\} \equiv \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k = \underbrace{\beta \alpha^k}_{-\alpha^k \beta} \beta \alpha^l + \underbrace{\beta \alpha^l}_{-\alpha^l \beta} \beta \alpha^k = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ -2 \mathbb{I}, & k = l \end{cases}$$

die grundlegende algebraische Struktur der Dirac-Matrizen

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}}, \quad (\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu} : \text{Clifford-Algebra.}$$

Die Dirac-Gleichung erhält jetzt die Gestalt

$$(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\psi = 0$$

oder nach Division durch \hbar

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0} \quad \text{Dirac-Gleichung, DE.}$$

Der Kehrwert des Massenterms entspricht dabei der reduzierten Compton-Wellenlänge des Fermions (Elektrons, Myons usw.). Für das Elektron ist

$$\frac{\hbar}{mc} \equiv \lambda_c, \quad \lambda_c^e \simeq 3,86 \cdot 10^{-13} \text{ m.}$$

Feynman hat folgende abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$\not{v} \equiv \gamma \cdot v \equiv \gamma^\mu v_\mu = \gamma_\mu v^\mu = \gamma^0 v^0 - \gamma \vec{v} \quad (\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu)$$

($v^\mu \hat{=}$ beliebiger Vektor; slash / $\hat{=}$ skalare Multiplikation mit γ_μ .)

Damit wird die freie Dirac-Gleichung

$$\boxed{\left[-i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right]\psi = 0}$$

mit den γ -Matrizen in der oben angegebenen speziellen Darstellung (Dirac-Darstellung)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine dazu äquivalente Darstellung ergibt sich durch $\gamma \rightarrow M\gamma M^{-1}$ mit einer beliebigen nichtsingulären Matrix M (d. h. $\det M \neq 0$). (Andere gebräuchliche Darstellungen: Majorana- und chirale Darstellungen, s. Bibliographie am Ende des Buches).

Der zu ψ **Dirac-adjungierte** Spinor ist

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0.$$

Mit ihm lässt sich die Viererstromdichte $j^\mu = (c\rho, j^k)$ aus Kap. 4.2 schreiben als

$$j^\mu = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

und die Kontinuitätsgleichung wird

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

4.5 Lösungen der freien DE

Die Lösungen der freien Dirac-Gleichung zu definiertem Impuls \vec{p} sind (Probe durch Einsetzen)

$$\psi_{p\ 1,2}^{(+)}(x) = e^{-i(cp_0t - \vec{p}\vec{x})/\hbar} \begin{pmatrix} \chi_{1,2}^{(+)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi_{1,2}^{(+)}}{p_0 + mc} \end{pmatrix} \quad \text{positive Energie}$$

$$\psi_{p\ 1,2}^{(-)}(x) = e^{i(cp_0t - \vec{p}\vec{x})/\hbar} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi_{1,2}^{(-)}}{p_0 + mc} \\ \chi_{1,2}^{(-)} \end{pmatrix} \quad \text{negative Energie}$$

mit $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} > 0$: $E^2 = c^2p_0^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ (relativistische Energie-Impuls-Beziehung), wobei $\chi_{1,2}^{(\pm)}$ jeweils zwei linear unabhängige **zwei-komponentige** konstante Spinoren bezeichnen.

Wie bei der KGE gibt es zwei Sorten von Lösungen, die einen mit positiver Energie $E = +cp_0$, für die sich die Interpretation als Teilchenwellenfunktion anbietet, und die anderen mit negativer Energie $E = -cp_0$, die den Dirac-See bilden; dazwischen liegt das verbotene Energieintervall $[-m \cdot c^2 \dots m \cdot c^2]$, s. Abb. 4.1. Die scheinbare Asymmetrie zwischen Lösungen zu positiver und negativer Energie wird dann in der Quantenfeldtheorie aufgehoben. Die Dirac-Gleichung ist dort eine Gleichung für Feldoperatoren; Teilchen und Antiteilchen werden völlig symmetrisch

behandelt. (Zur physikalischen Interpretation der negativen Energien und dem Zusammenhang zu Antiteilchen s. auch Einleitung).

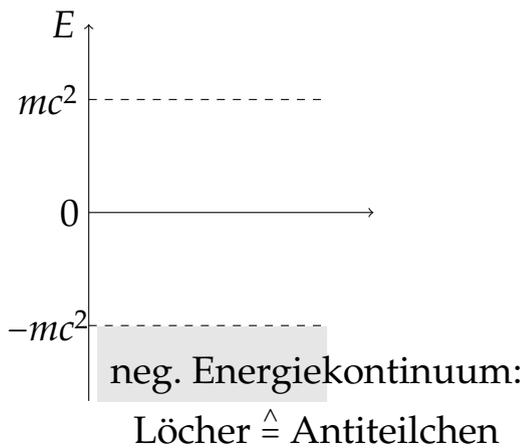


Abb. 4.1: Positive und negative Energien mit $|E| > mc^2$ bei den Lösungen der Dirac-Gleichung

Die positiven und negativen Lösungen sind aufgrund der Freiheiten bei der Wahl der Spinoren $\chi_{1,2}^{(\pm)}$ noch nicht eindeutig spezifiziert, so dass wir neben dem Dirac-Hamilton-Operator H_D und dem Impulsoperator \vec{p} einen weiteren Operator erwarten, der nur auf die inneren Freiheitsgrade der Wellenfunktionen wirkt und zusammen mit H_D und \vec{p} einen vollständigen Satz kommutierender Observabler bildet. Dieser Operator hängt mit dem **Spin** zusammen, dessen Quantenzahl den Wert $\frac{1}{2}$ hat (s. Kap. 6); die DE ist deshalb für die Beschreibung von Spin-1/2-Fermionen geeignet. Für ein freies ruhendes Teilchen mit Wellenzahl $k = 0$, Impuls $\vec{p} = 0$ ist die DE

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \beta mc^2 \psi$$

mit den Lösungen zu positiven/negativen Energien $E = \pm mc^2$

$$\psi_1^+ = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2^+ = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_1^- = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2^- = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.6 Kopplung an das elektromagnetische Feld

Wie in der nichtrelativistischen Theorie wird der kanonische Impuls \vec{p} durch den kinetischen Impuls $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ ersetzt, und das skalare elektrische Potenzial $e\phi$ kommt zur Ruheenergie im Dirac-Hamilton-Operator hinzu (minimale Kopplung; s. KGE). Es ergibt sich die folgende Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[c\vec{\alpha} \underbrace{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)}_{\vec{\pi}} + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi$$

mit der Ladung e des Teilchens mit Masse m , beim Elektron also $e = -e_0$. Der Hamilton-Operator **mit Feld** ist nach wie vor **hermitesch**. Analog zum Klein-Gordon-Fall ist die Gleichung unter der lokalen **Eichtransformation**

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \end{aligned}$$

bzw. $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$ **invariant**, wenn gleichzeitig die Wellenfunktion ψ mit einer entsprechenden Phase multipliziert wird:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\Lambda(x)} \psi \\ \Lambda(x) &= \frac{e}{\hbar c} \chi(x) \end{aligned}$$

($\chi(x)$ eine beliebige reelle skalare Funktion der Raum-Zeit-Koordinaten).

Nichtrelativistischer Grenzfall

Verwende die explizite Darstellung der Dirac-Matrizen

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

und zerlege den Viererspinor ψ in zwei zweikomponentige Spaltenvektoren,

$$\psi = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}; \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \bar{\chi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{wegen } \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3);$$

\Rightarrow DE :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \bar{\chi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \bar{\varphi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ -\bar{\chi} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Ruheenergie mc^2 die größte Energie im Problem; wir machen deshalb in der Lösung zu positiver Energie den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Hier variieren die $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ nur langsam und genügen exakt der Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \varphi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (**)$$

Beweis: Die Zeitableitung auf der linken Seite der Gleichung (*) ergibt

einen Term

$$i\hbar \cdot \left(\frac{-imc^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix};$$

nach Division durch $e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}$ und Subtraktion von $i\hbar \cdot \left(\frac{-imc^2}{\hbar} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$

wird das letzte Glied auf der rechten Seite von (**)

$$-mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} = -2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}.$$

In der unteren Gleichung in (**) vernachlässigen wir nun im nichtrelativistischen Grenzfall $\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi \equiv \hbar \dot{\chi}$ und $e\phi\chi$ gegenüber $2mc^2\chi$ und machen den Ansatz

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \vec{\pi}}{2mc} \varphi$$

⇒ Im nichtrelativistischen Grenzfall ist χ gegenüber φ um einen Faktor der Größenordnung $\sim \frac{v}{c}$ kleiner; φ ist die große, χ die kleine Komponente des Spinors. Im nichtrelativistischen Grenzfall vernachlässigen wir die kleine Komponente.

Setzen wir diesen Ansatz in erste DGL in (*) ein, fällt der Massenterm

weg:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \vec{\pi}) (\vec{\sigma} \vec{\pi}) + e\phi \right] \varphi, \quad \vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} = -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Es ist $\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$, was sich durch Einsetzen der Pauli-Matrizen und des Levi-Civita Tensors nachrechnen lässt:

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{gerade Permutation} \\ -1, & \text{ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man erhält

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = \vec{\pi}^2 + i\vec{\sigma}(\vec{\pi} \times \vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c} \vec{\sigma} \vec{B} \quad \text{mit } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

denn

$$\vec{\pi} \times \vec{\pi} = (-i\hbar) \left(-\frac{e}{c} \right) (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = i \frac{e\hbar}{c} \vec{B}$$

oder komponentenweise

$$(\vec{\pi} \times \vec{\pi})^i = -i\hbar \left(-\frac{e}{c} \right) \varepsilon^{ijk} (\partial_j A^k - A^k \partial_j) = i \frac{\hbar e}{c} \varepsilon^{ijk} (\partial_j A^k - A^k \partial_j)$$

$$\text{mit } \boxed{B^i = \varepsilon^{ijk} (\partial_j A^k - A^k \partial_j)} \hat{=} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Für die große Komponente des Dirac-Spinors folgt daraus die
DE mit elektromagnetischem Feld im nichtrelativistischen Grenzfall

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \vec{B} + e\phi \right] \varphi}.$$

Dieses Resultat entspricht der **Pauli-Gleichung** der nichtrelativistischen QM für den **Pauli-Spinor** φ , dessen beide Komponenten den Spin des Elektrons beschreiben. Auch der (bis auf QED-Korrekturen) richtige **gyromagnetische Faktor** $g = 2$ kommt heraus.

Zum **Beweis** wiederholt man die aus der nichtrelativistischen QM bekannten Schritte:

Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld \vec{B} mit Vektorpotenzial \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}),$$

denn

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{B}$$

$$\text{wegen } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Bahndrehimpuls und Spin:

Um die Äquivalenz zur Pauli-Gleichung zu zeigen und das magnetische Moment mit Bahn- und Spinanteil zu erhalten, benötigen wir die Drehimpulsoperatoren

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{Bahndrehimpuls}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \quad \text{Spin}$$

Einsetzen in die rechte Seite der DE im nichtrelativistischen Grenzfall ergibt (bis auf das skalare Potenzial)

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 - \frac{2e}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} \right) - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 - \frac{e}{2mc} (\vec{L} \cdot \vec{B} + 2\vec{S} \cdot \vec{B})$$

$$\text{mit } -2\vec{p} \cdot \vec{A} = -2\frac{1}{2} \vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) = -\vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = -\vec{L} \cdot \vec{B}, \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{2\vec{S}}{\hbar} \cdot \vec{B}.$$

⇒ **Nichtrelativistische Näherung der Dirac-Gleichung**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \underbrace{\frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}}_{\equiv \vec{\mu}} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + e\phi \right) \varphi$$

mit $\vec{\mu}$ = magnetisches Moment aus Bahn- und Spinanteil. Mit den Abkürzungen H_0 für den wechselwirkungsfreien Anteil, und H_{int} für die Wechselwirkung schreiben wir

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = [H_0 + H_{int}] \phi}, \quad H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\boxed{H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + e\phi}$$

und das magnetische Moment ist

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{Bahn} + \vec{\mu}_{Spin} = \frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}).$$

Das Spin-Moment ist demnach

$$\boxed{\vec{\mu}_{Spin} = \frac{e}{2mc} \cdot 2\vec{S} \equiv g_e \cdot \frac{e}{2mc} \vec{S}}$$

mit dem **Landé-Faktor** (gyromagnetischen Faktor) $\boxed{g_e = 2}$.

Er bestimmt, um wie viel stärker sich der Spin auf die Teilchenenergie auswirkt als ein gleich großer Bahndrehimpuls.

Im Rahmen der **Quantenelektrodynamik** (s. Kap. 9) werden Korrekturterme $g_e = 2(1 + \alpha/(2\pi) + \dots)$ berechnet. Man erhält für das freie Elektron bei Berücksichtigung von zehn Koeffizienten in der Entwicklung nach der Feinstrukturkonstanten $g_e^{th} = 2,0023193048(8)$ in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $g_e^{ex} = 2,0023193043622(22)$.

Mit dem **Bohr'schen Magneton** (Betrag)

$$\mu_B = \frac{e_0 \hbar}{2m_e c} \quad (\sim 5,788 \cdot 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{T}^{-1}); \quad \frac{e}{2mc} \equiv -\frac{\mu_B}{\hbar}$$

lässt sich das magnetische Spinmoment des Elektrons ($m \equiv m_e$; $e \equiv -e_0 \equiv -1$ elektr. Elementarladung) schreiben als

$$\boxed{\vec{\mu}_{Spin} = -g_e \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}}.$$

Für ein **Coulomb-Potenzial** $e\phi = -\frac{Ze_0^2}{r}$ ist das Zeitverhalten der Lösung φ durch die Rydberg-Energie charakterisiert, $R_y = \frac{mc^2\alpha^2}{2} \simeq 13,6 \text{ eV}$ für $Z = 1$ (mit $\alpha^2 = \frac{e^2}{\hbar c}$).

Bei kleinem Z (insbesondere beim H-Atom mit $Z = 1$) ist die Ruheenergie des Elektrons sehr viel größer als diese Energie, $911 \text{ keV} \gg 13,6 \text{ eV}$, so dass die Vernachlässigung von χ in der Bewegungsgleichung nachträglich gerechtfertigt ist.

Ankopplung an das elektromagnetische Feld in kovarianter Form:

Wir gehen aus von der freien Dirac-Gleichung

$$\left[-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0$$

mit dem Impulsoperator

$$\begin{aligned} p_\mu &= i\hbar \partial_\mu, & \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} && \text{kovariant} \\ p^\mu &= i\hbar \partial^\mu, & \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} && \text{kontravariant.} \end{aligned}$$

Die zeitlichen und räumlichen Komponenten des Impulsoperators sind

$$p^0 = p_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}; \quad p^k = -p_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Analog zum Klein-Gordon-Fall ersetzen wir in minimaler Kopplung den Impulsoperator durch Operator minus Viererpotenzial

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad A^\mu = (A^0, \vec{A}), \quad A^0 = c\phi$$

und erhalten so die kovariante Form der DE mit elektromagnetischem Feld

$$\boxed{\left[-\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) + mc \right] \psi = 0}.$$

Kontinuitätsgleichung mit elektromagnetischem Feld

Aufgrund der Hermitezität des Hamilton-Operators ermöglicht die DE – im Gegensatz zur KGE – die Definition einer positiv definiten Wahrscheinlichkeitsdichte.

Beweis: Wir gehen aus von der Dirac-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left[c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + e\phi + \beta mc^2 \right] \psi(x)$$

und multiplizieren von links mit dem adjungierten Zeilenvektor

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\Rightarrow i\hbar \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \psi^+ \alpha \vec{\nabla} \psi - e\psi^+ \vec{\alpha} \vec{A} \psi + e\phi \psi^+ \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi.$$

Adjunktion der DE (mit $\alpha = \alpha^+$, $\beta = \beta^+$) und anschließende Multiplikation von rechts mit ψ ergibt

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\vec{\nabla} \psi^+) \alpha \psi - e\psi^+ \vec{\alpha} \vec{A} \psi + e\phi \psi^+ \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt eine Kontinuitätsgleichung der Form (die Terme mit \vec{A}, ϕ, m heben sich weg):

$$\boxed{\frac{\partial \varrho(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j}(x) = 0}$$

$$\text{mit } \varrho = \psi^+ \psi, \quad \vec{j} = \psi^+ c \vec{\alpha} \psi.$$

Wendet man hierauf den **Gauß'schen Satz** an, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \varrho = - \int d^3x \vec{\nabla} \vec{j} = \oint d\vec{F} \vec{j} = 0:$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist zeitlich konstant, $\int d^3x \varrho(x) = \text{const.}$

Dies rechtfertigt zusammen mit

$$\psi^+ \psi = \sum_{\mu} \psi_{\mu}^* \psi_{\mu} = \sum_{\mu} |\psi_{\mu}|^2 \geq 0$$

die Interpretation von ρ als **positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte**, und dementsprechend \vec{j} als Wahrscheinlichkeitsstromdichte.

Ferner kann das in der nichtrelativistischen QM eingeführte Skalarprodukt (in der Ortsdarstellung) übernommen werden:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d^3x \psi^\dagger(x) \phi(x)$$

mit den Konsequenzen

- **Orthogonalität** der Eigenzustände hermitescher Operatoren mit verschiedenen Eigenwerten,
- **Darstellungsunabhängigkeit** des Skalarproduktes unter unitären Transformationen.

Im Gegensatz zum nichthermiteschen Klein-Gordon-Fall ist im hermiteschen Dirac-Fall **keine** Modifikation der in der nichtrelativistischen Theorie gebräuchlichen Begriffe Skalarprodukt, Hermitezität und Unitarität erforderlich.

(In der Klein-Gordon-Theorie lässt sich ein verallgemeinertes Skalarprodukt definieren:

$$\langle \psi | \phi \rangle_V = \int d^3x \psi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x).$$

Ein sehr erfolgreiches Anwendungsgebiet der Dirac-Gleichung im Feld ist die Physik myonischer Atome. In solchen Myonenatomen ist ein Hüllenelektronen durch ein negativ geladenenes Myon (μ^-) ersetzt. Ein myonisches Atom entsteht, wenn ein Myon in einer der äußeren Schalen eines Atoms eingefangen wird; für den Einfang mehrerer Myonen reichen die Intensitäten heutiger Myonenstrahlen nicht aus.

Das μ^- geht dann in einer Kaskade unter Aussendung von Photonen und Auger-Elektronen in den Grundzustand über und wird dort nach

einigen Nanosekunden – analog zum K -Einfang eines Elektrons – durch den Kern absorbiert. Dabei wird ein Proton zu einem Neutron, und ein Myonneutrino wird emittiert. Freie Myonen unterscheiden sich von Elektronen durch ihre endliche mittlere Lebensdauer von $2,2 \mu\text{s}$ – sie zerfallen infolge schwacher Wechselwirkung in ein Elektron und zwei Neutrinos – und eine etwa 207-fach größere Masse.

Der Bohr'sche Radius einer Myonbahn ist um diesen Faktor kleiner als der Radius der Elektronenbahn des gleichen Zustandes. Da er mit $1/Z$ skaliert, beträgt er in schweren myonischen Atomen wie Blei mit $Z = 82$ nur etwa 3 fm, ist also deutlich kleiner als der Kernradius: Das Myon hat eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern. Auf diese Weise wird der Einfluss des Atomkerns auf den myonischen Zustand (Hyperfeinstruktur, Isotopieeffekte, insbesondere Volumeneffekt) durch die elektromagnetische Wechselwirkung deutlich, und die Kernstruktur sowie kernphysikalische Effekte (u. a. strahlungslose Neutronenemission) können mit Hilfe myonischer Atome präzise untersucht werden [4].

Die mittlere Bahngeschwindigkeit des Myons skaliert mit der Protonenzahl des Kerns und erreicht deshalb – besonders im $1s_{1/2}$ -Grundzustand in schweren myonischen Atomen, aber auch in den $n = 2$ -Zuständen – einen wesentlichen Teil der Lichtgeschwindigkeit. Nichtrelativistische Rechnungen sind hier nicht anwendbar, die Dirac-Gleichung ermöglicht jedoch eine genaue Modellierung des Systems. In sehr schweren myonischen Atomen wie myonischem Blei muss ferner das Oszillator-Coulomb-Potenzial durch ein realistischeres Woods-Saxon Potenzial ersetzt werden; die Lösung der Dirac-Gleichung ist dann nur noch numerisch möglich. Zusätzlich sind quantenelektrodynamische Effekte – insbesondere die Lamb-Shift, s. Kap. 6 und 9 – zu berücksichtigen.

In myonischem Wasserstoff wurde 2010 mit Hilfe von Laserspektroskopie der myonischen Lamb-Shift am schweizerischen Paul-Scherrer-

Institut auch der Protonenradius gemessen. Das Ergebnis des ersten derartigen Experiments $R_p = 0,84184(67)$ fm war um etwa 5 Standardabweichungen kleiner als vorherige Messwerte aus Streuexperimenten an elektronischem Wasserstoff [5]. Von derselben Arbeitsgruppe durchgeführte Experimente im Jahr 2013 ergaben einen nochmals genaueren Wert [6]. Obwohl es verschiedene Hypothesen zu den möglichen Ursachen – wie die Kernpolarisation durch das Myon – gibt, ist die genaue Ursache dieses Proton-Radius Puzzles bis heute unbekannt. Ob es sich um neue Physik jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik handelt bleibt zunächst offen – es ist aber relativ unwahrscheinlich.

Literatur

- [1] Dirac, P.A.M.: The quantum theory of the electron. Proc. Roy. Soc. A117, 610 (1928)
- [2] Pauli, W.: Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac. Annales de l'I. H. P. 6, 109 (1936)
- [3] Peskin, M.E., Schroeder, D.V.: An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press (1995)
- [4] Lohs, K.-P., Huefner, J., Wolschin, G.: Nuclear Auger effect in muonic atoms. Nucl. Phys. A236, 457 (1974)
- [5] Pohl, R. et al.: The size of the proton. Nature 466, 213 (2010)
- [6] Pohl, R. et al.: Muonic Hydrogen and the Proton Radius Puzzle. Ann. Rev. Nucl. Part. Science 63, 175 (2013)

5 Invarianzen der Dirac-Gleichung

5.1 Lorentz-Kovarianz

Die Lorentz-Kovarianz wurde bereits bei der Ableitung der Dirac-Gleichung gefordert, sie ist deshalb in der **Gestalt der DE** bereits berücksichtigt. Wegen der prinzipiellen Bedeutung soll sie dennoch erneut diskutiert werden.

Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen sich kräftefreie Teilchen gleichförmig (= mit konstanter Geschwindigkeit) bewegen. **Relativistische Invarianz** einer Gleichung bedeutet, dass diese Gleichung in allen Inertialsystemen die gleiche Form annimmt.

Die **Lorentz-Transformationen** (LT) geben an, wie sich die Koordinaten zweier Inertialsysteme ineinander transformieren. Hier soll das Verhalten des Dirac-Spinors bei Lorentz-Transformationen untersucht werden. Die Lorentz-Transformationen vermischen dabei Raum- und Zeitkoordinaten.

Die für die Koordinatentransformation erforderliche 4×4 -Matrix sei Λ . Dann definieren folgende Beziehungen die Lorentz-Transformationen:

- Aus der Forderung der Invarianz des d'Alembert-Operators

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

gegenüber Lorentz-Transformation folgt (mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$)

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho} \quad (*)$$

- oder in Matrixform

$$\Lambda g \Lambda^T = g \quad (**)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda \\ \Rightarrow \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu &= \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu \partial'_\rho \stackrel{!}{=} \partial'_\lambda g^{\lambda\rho} \partial'_\rho \\ \Rightarrow \Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu &= g^{\lambda\rho} \\ &\stackrel{\wedge}{=} \Lambda g \Lambda^T = g.\end{aligned}$$

Lorentz-Gruppe

Zunächst soll hier gezeigt werden, dass die Lorentz-Transformationen $(*)$, $(**)$ eine Gruppe bilden:

(a) Abgeschlossenheit

Betrachte zwei Lorentz-Transformationen Λ_i und Λ_j , $i \neq j$. Führt man beide nacheinander aus, ergibt sich mit $(**)$:

$$(\Lambda_i \Lambda_j)^T g (\Lambda_i \Lambda_j) = \Lambda_j^T (\Lambda_i^T g \Lambda_i) \Lambda_j = \Lambda_j^T g \Lambda_j = g.$$

(b) Einselement

Sei \mathbb{I} Einheitsmatrix, dann gilt: $\mathbb{I}\Lambda = \Lambda\mathbb{I}$.

(c) Inverses Element

Sei Λ ein Element aus der Gruppe, dann gilt:

$$g^{-1} \Lambda^T g \Lambda = g^{-1} g = \mathbb{I} \Rightarrow \Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g.$$

Damit bilden die Lorentz-Transformationen eine Gruppe, die als **Lorentz-Gruppe** bezeichnet wird.

Aus der Forderung der Invarianz des d'Alembert-Operators lässt sich die Determinante von Λ bestimmen, für die gilt: $(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$. Die Lorentz-Transformation kann demnach auch eine Drehung und Spiegelung im Minkowski-Raum darstellen.

Aus dem Matricelement $\lambda = 0$, $\varrho = 0$ der Definitionsgleichung folgt

$$\Lambda^0_{\mu} g^{\mu\nu} \Lambda^0_{\nu} = 1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_k (\Lambda^0_k)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1 \text{ oder } \Lambda^0_0 \leq -1.$$

Die Vorzeichen der Determinante von Λ und das von Λ^0_0 werden zur Klassifizierung der Elemente der Lorentz-Gruppe verwendet:

	$\text{sgn}\Lambda^0_0$	$\det \Lambda$
Eigentlich orthochron L_+^{\uparrow}	1	+1
Uneigentlich orthochron L_-^{\uparrow}	1	-1
Zeitspiegelungsartig L_-^{\downarrow}	-1	-1
Raum-Zeit-spiegelungsartig L_+^{\downarrow}	-1	+1

Eigentliche LT: Ausschluss von Raum-Zeit-Translation, Raumreflexion, Zeitspiegelung.

Spezielle eigentliche LT: Ausschluss von 3d-Rotationen.

Im Folgenden betrachten wir die eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe.

Bei **gleichförmiger** Bewegung hängen die Koordinaten eines Ereignisses in zwei Inertialsystemen I und I' durch eine **lineare** Transformation miteinander zusammen:

$$I \longrightarrow I' : x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{eigentliche LT.}$$

Dazu ist eine Transformation

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

gesucht, so dass die folgende – durch die Dirac-Gleichung bestimmte –

Forminvarianz in den beiden Inertialsystemen gilt:

$$I: \left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0$$

$$I': \left(-i\gamma^\mu \partial'_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0.$$

Dabei soll $S(\Lambda)$ eine invertierbare 4×4 -Matrix sein, so dass für die inverse Transformation gilt $((\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu = x^\nu)$

$$\psi(x) = S(\Lambda)^{-1} \psi'(x').$$

Die γ -Matrizen ändern sich bei Lorentz-Transformation nicht. Im Ausdruck für I' kann das Bezugssystem gewechselt werden, denn es gilt für den transformierten Gradienten:

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad \text{kovarianter Vierergradient.}$$

Setzt man diese Gleichung in den Ausdruck im System I' ein, so folgt:

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{mc}{\hbar} \right) S(\Lambda) \psi(x) = 0.$$

Multiplikation von links mit $S(\Lambda)^{-1}$ ergibt

$$\left(-iS(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} S(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0.$$

Damit dies mit der Ausgangsgleichung im System I übereinstimmt, muss gelten:

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} S(\Lambda) = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\Lambda) (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

$$\Leftrightarrow \gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = S(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda)^{-1}.$$

Wir erhalten also die folgende Bedingungsgleichung für $S(\Lambda)$:

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Man kann zeigen, dass diese Gleichung nichtsinguläre Lösungen für $S(\Lambda)$ hat. Die DE ist demnach forminvariant gegenüber eigentlichen Lorentz-Transformationen.

Poincaré-Transformationen(\equiv die **inhomogenen LT**) haben die Gestalt

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

$$x' = \Lambda x + a \Leftrightarrow x' - a = \Lambda x \Leftrightarrow x = \Lambda^{-1}(x' - a)$$

mit reellem $\Lambda^{\mu}_{\nu}, a^{\mu}$.

Poincaré-Gruppe \equiv (inhomogene Lorentz-Transformation, $a^{\mu} \neq 0$). Gruppeneigenschaften können analog zu Lorentz-Gruppe nachgewiesen werden.

(Die Lorentz-Gruppe bzw. die Gruppe der **homogenen LT** enthält alle Elemente mit $a^{\mu} = 0$).

Inhomogene LT werden durch (Λ, a) charakterisiert, z. B.

- Translationsgruppe $(\Lambda, a) = (\mathbb{I}, a)$,
- Drehgruppe $(\Lambda, a) = (\mathbb{D}, 0)$.

Bei einer Poincaré-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen I und I' mit

$$x' = \Lambda x + a$$

muss entsprechend dem Relativitätsprinzip die **Dirac-Wellenfunktion** ψ' aus ψ **rekonstruierbar** sein, d. h., zwischen ψ' und ψ muss ein lokaler Zusammenhang gelten

$$\psi'(x') = F(\psi(x)) = F(\psi(\Lambda^{-1}(x' - a))).$$

Die DE im System I wird durch Poincaré-Transformation in eine DE in I' transformiert \Leftrightarrow Lorentz-Kovarianz der DE gilt (DE ist forminvariant gegenüber Poincaré-Transformation).

Der funktionale Zusammenhang muss linear sein (damit ψ und ψ' der linearen DE genügen):

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}(x' - a)), \text{ mit } S(\Lambda) \text{ } 4 \times 4 \text{-Matrix.}$$

In Komponenten:

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^4 S_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_\beta(\Lambda^{-1}(x' - a)).$$

Die Ableitung der Bedingungsgleichung für $S(\Lambda)$ unter Poincaré-Transformation erfolgt analog zur Lorentz-Transformation (s. oben).

Eine Wellenfunktion, die sich bei LT gemäß $\psi' = S\psi$ transformiert, heißt vierkomponentiger Lorentz-Spinor. (Zu expliziten Darstellungen von $S(\Lambda)$ s. Literatur).

5.2 Paritätstransformation P

Der Übergang von einem räumlichen kartesischen Rechts- zu einem Linkssystem ist definiert durch die folgende Paritätstransformation:

$$P: \quad t \rightarrow t' = t$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x}.$$

Es handelt sich um eine Raumspiegelung: Sie vertauscht nicht nur rechts und links, sondern auch oben und unten.

Ist die DE

$$\left[-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0 \quad \text{invariant unter dieser Transformation?}$$

Ansatz für den Dirac-Spinor im gestrichenen System:

$$\psi'(\vec{x}', t') = S(P)\psi(\vec{x}, t).$$

Können wir $S(P)$ so wählen, dass für ψ' die DE gilt? Wir nehmen an, dass $\psi'(\vec{x}', t')$ die DE im gestrichenen System erfüllt, und suchen nach Bedingungen für $S(P)$, die dies ermöglichen (jetzt $\hbar \equiv c \equiv 1$)

$$[-i\gamma^\mu \partial_{\mu'} + m] \psi'(\vec{x}', t') = 0; \quad \text{Ansatz für } \psi' \text{ einsetzen}$$

$$S^{-1}(P) \left[-i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x'^j} + m \right] \overbrace{S(P)\psi(\vec{x}, t)}^{=\psi'(\vec{x}', t')} = 0$$

$$\stackrel{\vec{x}' = -\vec{x}}{\Rightarrow} S^{-1}(P) \left[-i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m \right] S(P)\psi(\vec{x}, t) = 0.$$

Die letzte Gleichung reduziert sich auf die DE für $\psi(\vec{x}, t)$, falls

$$S^{-1}(P)\gamma^0 S(P) = \gamma^0, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}(P)\gamma^j S(P) = -\gamma^j, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}.$$

Das lässt sich erreichen durch die Wahl

$$\boxed{S(P) \equiv \gamma^0}, \text{ denn } (\gamma^0)^{-1}\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0, \quad (\gamma^0)^{-1}\gamma^j\gamma^0 = -(\gamma^0)^{-1}\gamma^0\gamma^j = -\gamma^j$$

und der paritätstransformierte Dirac-Spinor wird mit diesem $S(P)$

$$\boxed{\psi'(\vec{x}', t') = \gamma^0\psi(\vec{x}, t) = \gamma^0\psi(-\vec{x}', t')}.$$

$\psi'(\vec{x}', t')$ erfüllt jetzt dieselbe Bewegungsgleichung wie $\psi(\vec{x}, t)$. (Und bei Ersetzung der Spinoren durch Feldoperatoren auch dieselben Antivertauschungsregeln, wenn das Feld quantisiert wird – s. Kap. 9.)

Die Spinoren $\psi(\vec{x}, t)$ und $\psi'(\vec{x}, t)$ sind **äquivalent**, d. h., sie gehen durch eine unitäre Transformation $U(P)$ im Zustandsraum auseinander hervor:

$$\boxed{U(P)\psi(\vec{x}, t)U^{-1}(P) = \psi'(\vec{x}', t') = \gamma^0(\psi(\vec{x}, t))}.$$

Für **Ein-Teilchen-Zustände** (Abb. 5.1) ist mit $p' = \begin{pmatrix} p^0 \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$:

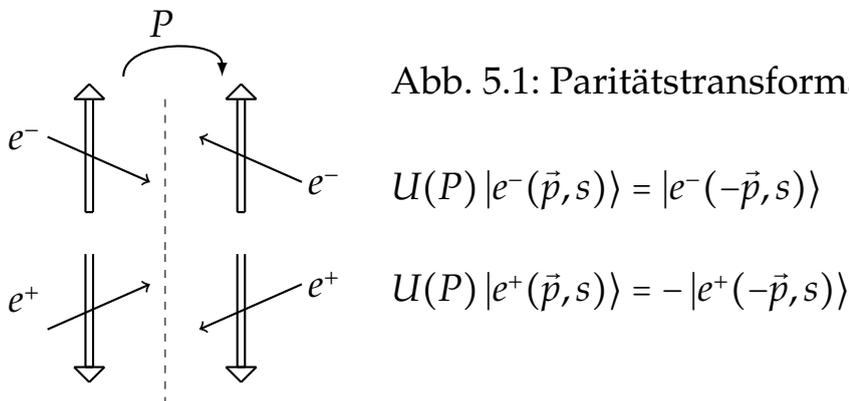


Abb. 5.1: Paritätstransformation von $|e^- \rangle$ und $|e^+ \rangle$

$$U(P) |e^-(\vec{p}, s)\rangle = |e^-(-\vec{p}, s)\rangle$$

$$U(P) |e^+(\vec{p}, s)\rangle = -|e^+(-\vec{p}, s)\rangle$$

Nach der Dirac-Theorie haben Elektron und Positron negative Parität relativ zueinander. Das lässt sich experimentell verifizieren beim Zerfall von Positronium, dem wasserstoffähnlichen Bindungszustand von e^+ und e^- , in Photonen. Man misst dabei die Winkelverteilungen der Photonen. Der **Singlettzustand** 1S_0 mit antiparallelen Spins $S = 0$, $M_s = 0$ heißt Parapositronium. Er hat eine mittlere Lebensdauer von $\tau \simeq 125$ ps und zerfällt in zwei Gammaquanten. Der **Tripletzustand** mit parallelen

Spins $S = 1, M_s = -1, 0, 1$ heißt Orthopositronium. Er hat eine mittlere Lebensdauer von $\tau \simeq 142$ ns, und zerfällt i.a. in drei Photonen mit Spin^{Parität} 1^- .

Zu jedem Zustand freier Elektronen und Positronen gibt es daher einen **paritätstransformierten**, in dem alle **Impulse** umgekehrt sind, die **Spins** ungeändert, und für jedes **Positron** ein Faktor (-1) hinzugefügt ist.

Sowohl ψ als auch ψ' erfüllen die DE. Durch Beobachtungen an einem System freier Elektronen und Positronen können wir daher im Rahmen der Dirac-Theorie ein räumliches kartesisches Rechts- von einem Linkssystem nicht unterscheiden.

Diese Äquivalenz wird in der Natur allerdings durch die paritätsverletzende **schwache Wechselwirkung** aufgehoben, wie von Lee und Yang theoretisch begründet [1], und 1957 durch Wu und Mitarbeiter beim Betazerfall von polarisiertem Kobalt-60 nachgewiesen [2]. Die gemessenen Winkelverteilungen zeigen, dass beim Zerfall die meisten Elektronen entgegen der Polarisationsrichtung der Kerne emittiert werden: Die schwache Wechselwirkung verletzt die Parität. (Schon 1928 hatten Cox et al. erste Hinweise auf eine Paritätsverletzung anhand der Polarisation von Betastrahlung gefunden und publiziert [3]. Dies passte jedoch nicht zur damaligen Lehrmeinung, dass die Parität in der Natur erhalten sein müsse, und wurde als Messfehler angesehen).

5.3 Ladungskonjugationstransformation C

Findet ein Beobachter, der die Rolle von Elektronen und Positronen vertauscht (Abb. 5.2) – dabei Spin- und Impulsvariable unverändert lässt –, andere Naturgesetze für die freien Teilchen?

Nein – im Rahmen der Dirac-Theorie ist es reine Konvention, was Elektron bzw. Positron genannt wird.

Um dies zu zeigen, suchen wir zunächst nach einer Invarianz der DE,

die ψ und $\bar{\psi}$ vertauscht ($\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ Dirac-adjungierter Spinor, s. Kap. 4.4).

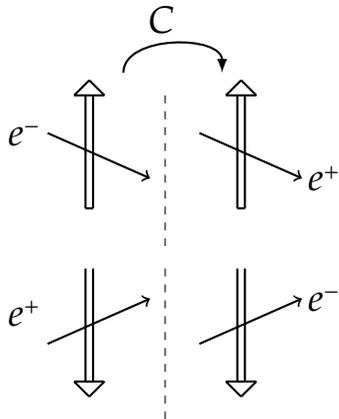


Abb. 5.2: Ladungskonjugation von Elektronen und Positronen

Aus der DE für ψ , $[-i\gamma^\mu \partial_\mu + m]\psi(x) = 0$, folgt die DE für den Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi}$

$$\left[-i(-\gamma^\mu)^T \partial_\mu + m\right]\bar{\psi}^T(x) = 0.$$

Dabei gelten die Matrixrelationen (Prüfen durch Einsetzen)

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad \bar{M} = \gamma^0 M^\dagger \gamma^0$$

$$\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}, \quad \gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{I}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = (-\gamma^j)^\dagger, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_1 M_2} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1$$

$$(\bar{\psi}_1 M \psi_2)^\dagger = \bar{\psi}_2 \bar{M} \psi_1, \quad \bar{\mathbb{I}} = \mathbb{I}; \quad \overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu.$$

Wie bei der Paritätstransformation erwarten wir bei Ladungskonjugation eine **Äquivalenztransformation** der Gestalt

$$S^{-1}(C)\gamma^\mu S(C) = (-\gamma^\mu)^T, \quad \text{jetzt jedoch für die transponierten } \gamma^{\mu'}\text{s.}$$

Das ist der Fall für

$$\boxed{S(C) = i\gamma^2 \gamma^0},$$

aus der DE für $\bar{\psi}^T$ folgt dann

$$S^{-1}(C) [-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] S(C) \bar{\psi}^T(x) = 0,$$

und der ladungskonjugierte Spinor

$$\boxed{\psi^C(x) = S(C) \bar{\psi}^T(x)}$$

erfüllt die DE,

$$\boxed{[-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi^C(x) = 0}.$$

(Nachprüfen durch Einsetzen).

Bei der Ladungskonjugationstransformation werden Elektronen mit Positronen vertauscht, Impuls- und Spinvariable unverändert gelassen.

Die C -Invarianz ist in der Natur – wie die P -Invarianz – durch die schwache Wechselwirkung gebrochen.

Auch die CP -Invarianz ist gebrochen, wie 1964 am Alternating Gradient Synchrotron (AGS) des Brookhaven-Nationallaboratoriums durch Beobachtung des Zerfalls langlebiger neutraler Kaonen (K_L^0 -Mesonen) in zwei Pionen gezeigt wurde: K_L^0 ist demnach kein Eigenzustand des CP -Operators, die CP -Invarianz ist verletzt [4].

5.4 Zeitumkehrtransformation T

Lässt sich durch Beobachtung freier Dirac-Teilchen die **positive** von der **negativen** Zeitrichtung unterscheiden? Nein: Freie Dirac-Teilchen zeichnen keine Zeitrichtung aus; lassen wir einen Dirac-Film freier Elektronen rückwärts laufen, sehen wir einen physikalisch möglichen Zustand.

Die Zeitumkehrtransformation (Abb. 5.3) eines Elektron-Positron-Zustandes dreht Impulse und Spins um:

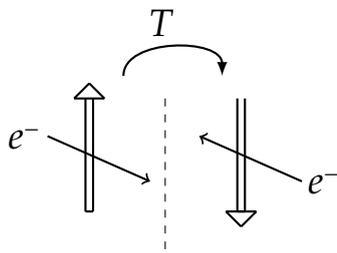
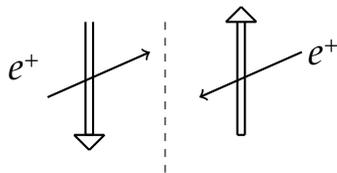


Abb. 5.3: Zeitumkehrtransformation

$$T: t \rightarrow t' = -t$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x}$$



Der Dirac-Spinor mit umgekehrtem Zeitargument $\psi(+\vec{x}, -t)$ erfüllt die Differenzialgleichung ($\hbar \equiv c \equiv 1$):

$$\left[-i(-\gamma^0) \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^i} + m \right] \psi(\vec{x}, -t) = 0$$

mit $(t \rightarrow -t) \Rightarrow$ Dirac-Gleichung für $\gamma^0 \rightarrow -\gamma^0$, $\gamma^i \rightarrow \gamma^i$,

mit der Matrix $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, die bei eigentlichen LT invariant ist und mit allen γ^μ antivertauscht,

$$\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0 \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3.$$

In der Standarddarstellung der γ^μ hat γ_5 die Gestalt $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$.

Damit findet man eine Transformation, die γ^0 in $-\gamma^0$ überführt und γ^j

ungeändert lässt,

$$\boxed{S' = \gamma_5 \gamma^0} : \quad S' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S'^{-1} \gamma^0 S' = -\gamma^0 : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\gamma^0$$

$$S'^{-1} \gamma^j S' = \gamma^j$$

⇒ der Spinor

$$\tilde{\psi}(\vec{x}, t) = S' \psi(\vec{x}, -t) = \gamma_5 \gamma^0 \psi(\vec{x}, -t)$$

erfüllt die DE (Prüfen durch Einsetzen). Da die DE auch bei Ladungskonjugation invariant ist, erfüllt auch der Spinor

$$\psi'(\vec{x}, t) = S' \psi^C(\vec{x}, -t) = S(T) \bar{\psi}^T(\vec{x}, -t) \quad \text{die DE, mit}$$

$$S(T) = S' \cdot S(C) = \gamma_5 \gamma^0 \cdot i \gamma^2 \gamma^0 = -i \gamma_5 \gamma^2 = i \gamma^2 \gamma_5 = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Man bezeichnet ψ' als **zeitumgekehrten Spinor**.

Im Fock-Raum – dem quantenmechanischen Hilbert-Raum, der Vielteilchensysteme auch mit variabler Teilchenzahl beschreibt – gibt es keine unitäre Transformation, die ψ in ψ' überführt. Dies leistet jedoch eine **antiunitäre** Transformation:

Ein Operator V ist antilinear, wenn \forall Zustände $|a\rangle, |b\rangle$ und für alle komplexen Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$V(c_1 |a\rangle + c_2 |b\rangle) = c_1^* V|a\rangle + c_2^* V|b\rangle.$$

Der hermitesch konjugierte Operator V^+ eines antilinearen Operators V ist definiert als

$$\langle a|V^+|b\rangle = \langle b|V|a\rangle : \quad V^+ \text{ ist ebenfalls antilinear.}$$

Ein Operator ist **antiunitär**, falls er antilinear ist und

$$V^+V = VV^+ = \mathbb{I} \text{ erfüllt.}$$

Dann ist für alle $|a\rangle, |b\rangle$ und

$$|a'\rangle = V|a\rangle, |b'\rangle = V|b\rangle$$

die Relation erfüllt

$$\langle a'|b'\rangle = \langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$$

\Rightarrow im Vergleich zu einer unitären Transformation muss man also zusätzlich komplex konjugieren bzw. bra und ket vertauschen: **Anfangs- und Endzustände werden vertauscht.**

Sei nun V antiunitär und A ein beliebiger linearer Operator. Der zu A **antiunitär** transformierte Operator A' ist **definiert als**

$$A' \equiv (VAV^{-1})^+,$$

d. h., gegenüber der unitären Transformation wird zusätzlich hermitesch konjugiert; der Zusammenhang zwischen A und A' wird linear:

Für eine beliebige komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$(c \cdot A)' = c^* A', \text{ und für die Matrixelemente gilt}$$

$$\langle a|A|b\rangle = \langle b'|A'|a'\rangle \text{ mit den gestrichenen Zuständen wie vorher.}$$

Nun gibt es eine antiunitäre Transformation $V(T)$, so dass gilt

$$[V(T)\psi(\vec{x}, t)V^{-1}(T)]^+ = \psi^+(\vec{x}, t) = S(T)\bar{\psi}^T(\vec{x}, -t).$$

Sie dreht **Impulse** und **Spin** um, und ist die physikalische Äquivalenztransformation der Zeitumkehr: Jedem Zustand $|a\rangle$ des ersten Beobachters kann der zweite Beobachter, der die Zeit umgekehrt zählt, den Zustand $|a'\rangle = V(T)|a\rangle$ zuordnen.

Jeder beobachtbaren Größe A kann der zweite Beobachter die Größe A' zuordnen,

$$A' = (VAV^{-1})^+,$$

die aus ψ' genau wie A aus ψ aufgebaut ist. Für die Erwartungswerte gilt

$$\langle a|A|a \rangle = \langle a'|A'|a' \rangle,$$

d. h. die **Messresultate** sind in entsprechenden Zuständen **identisch**. Für ein freies Dirac-Teilchen gilt daher **Zeitumkehr-Invarianz**.

In der **schwachen WW** gibt es jedoch T -verletzende Effekte: Im K^0 - \bar{K}^0 -System hat die CPLEAR Kollaboration am Europäischen Forschungszentrum CERN 1998 erstmals Anzeichen für eine Verletzung der T -Invarianz gefunden [5].

Exkurs: T -Invarianzverletzung im K^0 - \bar{K}^0 -System

In der Reaktion

$$\left. \begin{array}{l} p + \bar{p} \rightarrow K^+ + \pi^- + \bar{K}^0 \\ \rightarrow K^- + \pi^+ + K^0 \end{array} \right\} \text{entstehen } K^0, \bar{K}^0 \text{ mit gleicher Wahrscheinlichkeit.}$$

Die Strangeness des erzeugten neutralen Kaons ($\bar{K}^0 : S = +1; K^0 : S = -1$) wird anhand der Ladung des erzeugten Kaons ermittelt.

\bar{K}^0 und K^0 wandeln sich durch Oszillationen ineinander um und bilden eine Mischung aus Kaon- und Antikaon-Zuständen ($\Delta S = 2$).

Die Verwandlung von \bar{K}^0 in K^0 und umgekehrt sind **zeitgespiegelte Prozesse**; wenn Zeitumkehrinvarianz gilt, werden gleich viele Antikaonen in Kaonen umgewandelt wie umgekehrt.

Das experimentelle Ergebnis von CPLEAR zeigte nach der Auswertung von $1.3 \cdot 10^6$ Ereignissen [5]: Die Umwandlung eines Antikaons in ein Kaon ist um 0.66 % wahrscheinlicher als umgekehrt. Die Strangeness des Endzustandes wird dabei aus semileptonischen Zerfällen bestimmt,

$K^0 \rightarrow e^+\pi^-\nu$, $\bar{K}^0 \rightarrow e^-\pi^+\bar{\nu}$ ($\Delta S = \Delta Q$). Demnach wäre die T -Invarianz verletzt. Leider ist ein – nicht präzise bestimmbarer – Teil des beobachteten Effekts möglicherweise nicht auf T -Invarianzverletzung zurückzuführen, sondern auf die ebenfalls stattfindenden irreversiblen CP -verletzenden Zerfallsprozesse.

Später (2012) ist es der BABAR-Kollaboration am SLAC in Kalifornien gelungen, mit verschränkten Paaren von B -Mesonen einen unumstrittenen Nachweis der T -Invarianzverletzung durchzuführen. Das Experiment war dort so angelegt, dass die beobachteten Asymmetrien im Zerfall der $B^0\bar{B}^0$ -Zustände ausschliesslich von einer Verletzung der T -Invarianz herrühren können [6]. Die schwache Wechselwirkung verletzt demnach eindeutig – und anders als in der reinen Dirac-Theorie – die Zeitumkehr-Invarianz.

Stets ist jedoch das Produkt $\Theta = CPT$ in lokalen relativistischen Feldtheorien mit **beliebiger Wechselwirkung** eine Invarianztransformation [7, 8].

Literatur

- [1] Lee, T.D., Yang, C.N.: Question of Parity Conservation in Weak Interactions. Phys. Rev. 104, 254 (1956)
- [2] Wu, C.S., Ambler, E., Hayward, R.W., Hoppes, D.D., Hudson, R.P.: Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay. Phys. Rev. 105, 1413 (1957)
- [3] Cox, R.T., McIlwraith, C.G., Kurrelmeyer, B.: Apparent evidence of polarization in a beam of β -rays. Proc. Natl. Acad. Sci (USA) 14, 544 (1928)

- [4] Christenson, J.H., Cronin, J.W., Fitch, V.L., Turlay, R.: Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson. *Phys. Rev. Lett.* 13, 138 (1964)
- [5] Angelopoulos, A. et al. (CPLEAR-Kollaboration): First direct observation of time-reversal non-invariance in the neutral-kaon system. *Phys. Lett.* B444, 43 (1998)
- [6] Lees, J.P. et al. (BABAR Collaboration): Observation of Time-Reversal Violation in the B_0 Meson System. *Phys. Rev. Lett.* 109, 211801 (2012)
- [7] Lüders, G.: Proof of the TCP theorem. *Ann. Phys.* 2, 1 (1957)
- [8] Pauli, W.: Niels Bohr and the Development of Physics. McGraw-Hill, New York, and Pergamon Press, London (1955)

6 Lösung der Dirac-Gleichung mit Zentralpotenzial

Die Dirac-Gleichung soll für ein statisches zentralsymmetrisches Potenzial wie das Coulomb-Feld eines sphärischen Kerns analytisch gelöst werden. Betrachte dazu ein Spin-1/2-Teilchen mit Masse m , Ladung e (z. B. ein Elektron mit $m = m_e$, $e = -e_0$) in einem statischen Zentralfeld mit $\vec{A} = 0$; die potenzielle Energie ist $V(r) = e\phi(r)$. (Beispiel H-Atom: $V(r) = -\frac{e^2}{r}$)

In der DE für den statischen Fall,

$$H_D \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}); \quad \psi \text{ vierkomponentiger Spinor}$$

ist dann der Dirac-Operator gegeben als

$$H_D = c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 + V(r).$$

Die Lösung der DE erfolgt wie im Klein-Gordon-Fall durch Trennung der Variablen. Wir suchen zunächst Operatoren, die mit H_D vertauschen, so dass sie guten Quantenzahlen entsprechen.

In der **nichtrelativistischen** Theorie kommutiert der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

eines spinlosen Teilchens der Masse m im Zentralfeld $V(r)$ mit jeder kartesischen Komponente des Drehimpulsoperators,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \text{und mit } L^2.$$

⇒ Es gibt simultane Eigenzustände der Operatoren H , L^2 , L_z mit Eigenwerten

$$E, l(l+1)\hbar^2, m_l\hbar.$$

In der Dirac-Theorie kommutieren jedoch weder \vec{L} noch L^2 mit H_D ; vielmehr ist [1]

$$[H_D, \vec{L}] = -i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}),$$

und analog für den Spinoperator mit

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}; \quad S^2\psi = s(s+1)\hbar^2\psi, \quad s = \frac{1}{2}.$$

Die kartesischen Komponenten S_x, S_y, S_z haben je zwei mögliche Eigenwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$. Sie vertauschen jeweils mit den kartesischen Komponenten von \vec{L} , und

$$[H_D, \vec{S}] = i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}).$$

Der Gesamtdrehimpulsoperator ist $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, mit den üblichen Drehimpulsvertauschungsregeln, und

$[J^2, \vec{J}] = 0$: J^2 kommutiert mit jeder kartesischen Komponente von \vec{J} .

\Rightarrow Es gibt simultane Eigenfunktionen von J^2 und einer Komponente von \vec{J} , die wir als J_z wählen. \vec{J} kommutiert auch mit dem Dirac-Hamiltonian,

$$[H_D, \vec{J}] = [H_D, \vec{L}] + [H_D, \vec{S}] = 0$$

(d. h., jede kartesische Komponente von \vec{J} kommutiert mit dem Dirac-Hamiltonian), sowie $[H_D, J^2] = 0$.

\Rightarrow Es gibt **simultane Eigenzustände** von H_D, J^2 und J_z mit den **Eigenwerten**

$$E, j(j+1)\hbar^2, m_j\hbar.$$

Auch der Operator

$$\frac{\beta}{\hbar^2} \left(J^2 - L^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) \text{ kommutiert mit } H_D, \quad [1]$$

sowie der Paritätsoperator P ,

$$P \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

mit zweikomponentigen Spinoren ψ_A, ψ_B .

Simultane Eigenfunktionen der Operatoren L^2 , S^2 , J^2 und J_z sind die Spinwinkelfunktionen $\Upsilon_{l,s}^{j,m_j}$ mit der Parität $(-1)^l$. Sie sind Produkte aus den Kugelfunktionen Y_{l,m_l} und den Spinfunktionen $\chi_{1/2,m_s}$, wobei über die Quantenzahlen m_l, m_s summiert wird

$$\Upsilon_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j} = \sum_{m_l, m_s} C(l, \frac{1}{2}; m_l, m_s, m) Y_{l,m_l} \chi_{1/2, m_s}$$

mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten C als Entwicklungskoeffizienten. Es ist dann

$$\begin{aligned} \psi_A &\propto \Upsilon_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j} \\ \psi_B &\propto \Upsilon_{l',\frac{1}{2}}^{j,m_j}, \quad l' = l \pm 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} l = j - \frac{1}{2} & \simeq l' = j + \frac{1}{2} \\ l = j + \frac{1}{2}, & \simeq l' = j - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

und wir können für ψ den Lösungsansatz machen

$$\psi_{E\kappa m_j} = r^{-1} \begin{pmatrix} P_{E\kappa}(r) \Upsilon_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j} \\ iQ_{E\kappa}(r) \Upsilon_{l',\frac{1}{2}}^{j,m_j} \end{pmatrix}$$

mit den Radialfunktionen $P_{E\kappa}(r)$, $Q_{E\kappa}(r)$ (der Faktor i sorgt für reelle Radialgleichungen) und

$$\kappa = \pm(j + 1/2) = \begin{cases} l & \text{für } j = l - 1/2 \\ -(l + 1) & \text{für } j = l + 1/2. \end{cases}$$

Nach einigen Rechenschritten erhält man gekoppelte Differenzialgleichungen erster Ordnung für die Radialgleichungen,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right] P_{E\kappa}(r) &= \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c} Q_{E\kappa}(r), \\ \left[\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right] Q_{E\kappa}(r) &= \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c} P_{E\kappa}(r), \end{aligned}$$

analog zur radialen Schrödinger-Gleichung in der nichtrelativistischen Theorie. Durch Eliminieren von $Q_{E\kappa}(r)$ lässt sich das auch als DGL zwei-

ter Ordnung für $P_{E\kappa}(r)$ schreiben,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{A'}{A} \frac{d}{dr} + \left(AB + \frac{A'}{A} \frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} \right) \right] P_{E\kappa}(r) = 0$$

mit $A(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c}, \quad A' = \frac{dA}{dr}$

$$B(r) = \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c}.$$

Für das Coulomb-Problem in wasserstoffähnlichen Atomen mit Potenzial

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Z\alpha}{r}$$

folgt für die gekoppelten Gleichungen

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right] P_{E\kappa}(r) = \left[\frac{mc}{\hbar} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) + \frac{Z\alpha}{r} \right] Q_{E\kappa}(r)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right] Q_{E\kappa}(r) = \left[\frac{mc}{\hbar} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) - \frac{Z\alpha}{r} \right] P_{E\kappa}(r).$$

Übergang zu neuen Variablen

$$\varrho = r \cdot v, \quad v = \frac{mc}{\hbar} \left(1 - \frac{E^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2}$$

⇒ gekoppelte Gleichungen

$$\left[\frac{d}{d\varrho} - \frac{\kappa}{\varrho} \right] P_{E\kappa}(\varrho) = \left[\frac{mc}{v\hbar} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] Q_{E\kappa}(\varrho)$$

$$\left[\frac{d}{d\varrho} + \frac{\kappa}{\varrho} \right] Q_{E\kappa}(\varrho) = \left[\frac{mc}{v\hbar} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) - \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] P_{E\kappa}(\varrho).$$

Asymptotisches Verhalten für $\varrho \rightarrow \infty$:

$$\frac{d}{d\varrho} P_{E\kappa}(\varrho) = \left[\frac{mc}{v\hbar} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) \right] Q_{E\kappa}(\varrho)$$

$$\frac{d}{d\varrho} Q_{E\kappa}(\varrho) = \left[\frac{mc}{v\hbar} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) \right] P_{E\kappa}(\varrho).$$

Da wir nach gebundenen Zuständen suchen, müssen $P_{E\kappa}(\varrho)$ und $Q_{E\kappa}(\varrho)$ für $\varrho \rightarrow \infty$ verschwinden; die asymptotischen Gleichungen sind dann erfüllt für

$$P_{E\kappa}(\varrho) = a_1 e^{-\varrho}, \quad Q_{E\kappa}(\varrho) = a_2 e^{-\varrho}$$

$$\text{mit } \frac{a_1}{a_2} = - \left(\frac{1 + E/mc^2}{1 - E/mc^2} \right)^{1/2}.$$

Wir erwarten deshalb Lösungen der gekoppelten Gleichungen in der Form

$$P_{E\kappa}(\varrho) = N \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)^{1/2} e^{-\varrho} f(\varrho)$$

$$Q_{E\kappa}(\varrho) = -N \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right)^{1/2} e^{-\varrho} g(\varrho),$$

mit einer Normierungskonstante N ; für $\varrho \rightarrow \infty$ muss gelten $f(\varrho), g(\varrho) \rightarrow 1$. Die Radialfunktionen werden als Reihenentwicklungen angesetzt,

$$f(\varrho) = \varrho^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varrho^k, \quad c_0 \neq 0$$

$$g(\varrho) = \varrho^s \sum_{k=0}^{\infty} d_k \varrho^k, \quad d_0 \neq 0.$$

Einsetzen in die Radialgleichungen und Koeffizientenvergleich ergibt eine Folge von Gleichungen; aus der ersten folgt die Relation

$$s = \pm (\kappa^2 - Z^2 \alpha^2)^{1/2}.$$

Damit die Radialfunktionen am Ursprung $\varrho = 0$ regulär bleiben, muss das positive Vorzeichen gewählt werden.

Die folgenden Gleichungen ergeben Rekursionsrelationen für die Koeffizienten $c_1, d_1, \dots, c_n, d_n, \dots$

Um die asymptotische Randbedingung zu erfüllen, dass $P_{E\kappa}(\varrho)$ und $Q_{E\kappa}(\varrho)$ im Unendlichen verschwinden – nur dann bleibt die Wellenfunk-

tion normierbar –, müssen die Reihenentwicklungen abbrechen. (Die Argumentation ist analog zur nichtrelativistischen Theorie, und der Klein-Gordon-Theorie in Kap. 3.3).

Dies ist auch im Dirac-Fall nur für bestimmte Energiewerte möglich. Man erhält daraus die Abbruchbedingung

$$\frac{Z\alpha E}{(m^2c^4 - E^2)^{1/2}} = n - j - \frac{1}{2} + s$$

und durch Quadrieren

$$[(Z\alpha)^2 + (n - j - 1/2 + s)^2] E^2 = m^2c^4(n - j - 1/2 + s)^2.$$

Auflösen nach E ergibt nach Einsetzen von s und κ die Dirac-Energiewerte

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - \frac{1}{2} + [(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

(Die Lösung mit negativem Vorzeichen entfällt, da sie die ursprüngliche Gleichung für E nicht erfüllt: Deren rechte Seite ist positiv). Man bezeichnet diesen Ausdruck auch als Sommerfeld'sche Feinstrukturformel, denn Sommerfeld⁵ hatte bereits zwölf Jahre vor Dirac für ein relativistisches Elektron, das eine Keplerbewegung um den Atomkern beschreibt, eine Formel abgeleitet die äquivalent ist, sofern man den Quantenzahlen eine andere Bedeutung gibt.

Ähnlich wie im Klein-Gordon-Fall erhält man reelle Lösungen für ein Punktladungspotenzial nur bis zu einem Maximalwert der Kernladung: Für $Z\alpha > j + 1/2$ wird die Energie imaginär, so dass es für $s_{1/2}$ - und $p_{1/2}$ -Zustände reelle Lösungen nur bis $Z_{max} = 137$ gibt. Ersetzt man das Punktladungspotenzial durch ein realistisches Potenzial, wird dieser Bereich bei $Z_{krit} \simeq 173$ erreicht. Versuche, den bei noch größeren Z -Werten

⁵Arnold Sommerfeld (★1868 Königsberg, †1951 München).

vermuteten *Zerfall des Vakuums* in Kollisionen schwerer Ionen mit Protonenzahlen $Z_1 + Z_2 > Z_{krit}$ bei MeV-Energien nachzuweisen, waren jedoch bisher nicht erfolgreich.

Wir können die Dirac-Energieeigenwerte nach $(Z\alpha)^2$ entwickeln

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right],$$

und nach Subtraktion der Ruheenergie mc^2 erhält man die Energieeigenwerte $E_{nj} = E_{nj}^D - mc^2$,

$$E_{nj} = -E_n^{(0)} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

mit dem nichtrelativistischen Schrödinger-Energieeigenwert

$$E_n^{(0)} = \frac{mc^2(Z\alpha)^2}{2n^2},$$

der nur von der Hauptquantenzahl n abhängt. In der **Dirac-Theorie** spalten diese Niveaus demnach in eine **Feinstruktur** von n unterschiedlichen Niveaus E_{nj} auf, mit $j = 1/2, 3/2, \dots, n - 1/2$ – als Folge der relativistischen Effekte.

In der Dirac-Theorie sind zwei Niveaus mit **gleichen** (n, j) auch dann entartet, wenn sie unterschiedlichen Bahndrehimpuls haben ($l = j \pm 1/2$: z. B. $2s_{1/2}, 2p_{1/2}$). Die einzigen nichtentarteten Niveaus sind $1s_{1/2}, 2p_{3/2}, 3d_{5/2}$, usw.

Beim gebundenen Elektron weicht der g -Faktor (s. Kap. 4.6) vom Dirac-Wert $g_e^{Dirac} = 2$ für das freie Elektron ab. Die entsprechenden Korrekturen hat Breit erstmals 1928 berechnet [2]; er fand für ein Elektron im Feld eines wasserstoffähnlichen Atoms mit Protonenzahl Z

$$g_e = \frac{2}{3} (1 + 2 \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}) = 2 - 2/3 (Z\alpha)^2 - 1/6 (Z\alpha)^4 + O((Z\alpha)^6).$$

So reduziert der Breit-Term für ein Elektron im $1s$ -Zustand von Uran (U^{91+}) den g -Faktor um etwa 15%. Außerdem gibt es die in Kap. 4.6

bereits erwähnten QED Korrekturen. Im Resultat ist der g -Faktor des gebundenen Elektrons jedoch kleiner als zwei, beispielsweise $g \simeq 1,995$ für wasserstoffähnliches Silizium.

Termschema von Wasserstoff

Die analytischen Resultate für die Dirac-Energieniveaus im Wasserstoff sind in der folgenden Abb. 6.1 für die tiefliegenden Zustände mit $n = 1, 2, 3$ schematisch dargestellt.

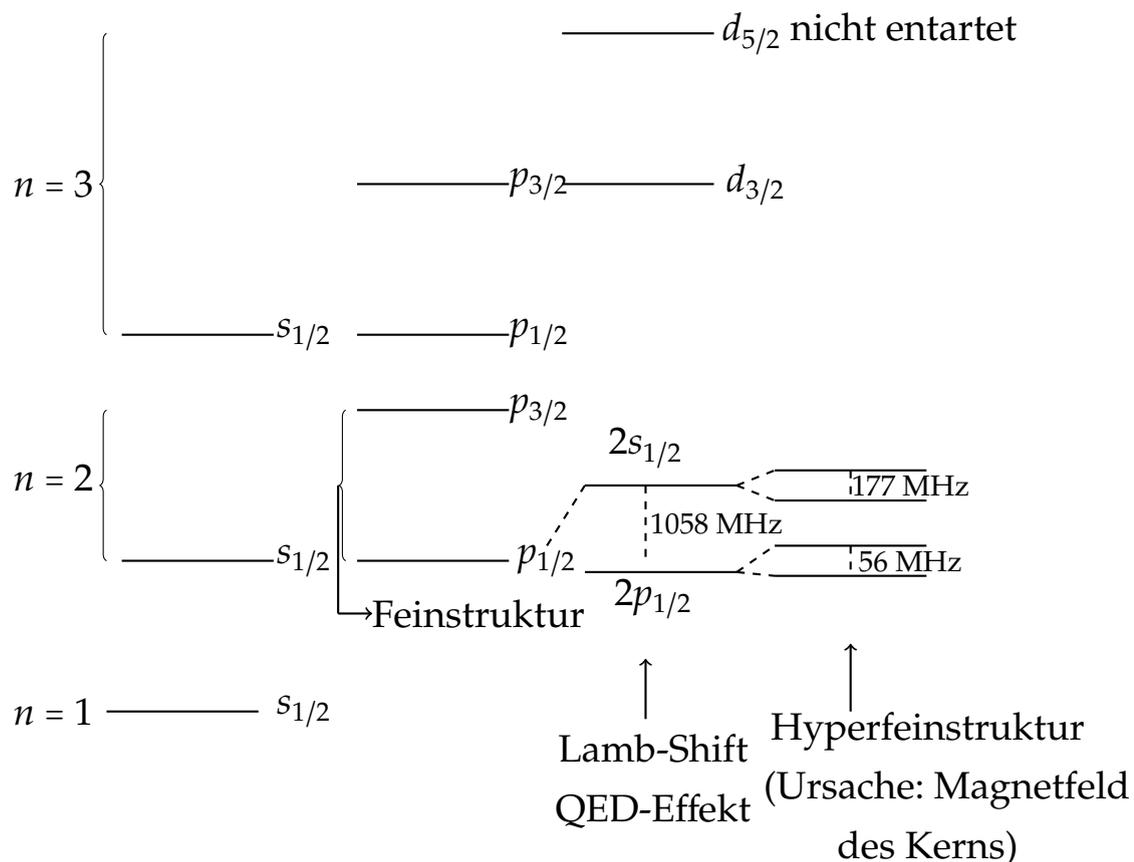


Abb. 6.1: Termschema von Wasserstoff (nicht maßstabgerecht)

Die Dirac-Theorie wurde in zahlreichen spektroskopischen Untersuchungen an Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Ionen (vor allem He^+) getestet. Man fand bereits 1937/38 experimentelle Anzeichen, dass die $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Niveaus nicht exakt übereinstimmen; aber durch die

Dopplerverbreiterung der Niveaus blieb die Lage unklar.

Erst 1947 konnten Lamb und Retherford mit Mikrowellentechniken einen Radiofrequenzübergang zwischen $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ induzieren, und die Übergangsfrequenz von 1058 MHz bestimmen [3]: Ausgangspunkt der Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED), eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien.

Bestimmung der Lamb-Shift (nichtrelativistische Approximation)

Die kleine Differenz der $2s_{1/2}$ - und $2p_{1/2}$ -Energieniveaus von ≈ 1058 MHz im H-Atom heisst **Lamb-Shift**⁶. Nach Dirac sollten beide Niveaus die gleiche Energie haben; die Wechselwirkung zwischen Elektron und Vakuum bewirkt jedoch eine Verschiebung. Die Messung (1947) der Verschiebung durch Lamb und Retherford [3] war der Auslöser für die Entwicklung der Renormierung im QED-Rahmen (s. Kap. 9) durch Schwinger, Feynman und Tomonaga.

Bethe gab 1947 eine (die erste) heuristische Ableitung der Lamb-Shift [4], die folgende didaktisch motivierte Darstellung beruht auf [5].

Mit dem Vakuum assoziierte **Fluktuationen des elektrischen und magnetischen Feldes** stören das Coulomb-Potenzial des Kerns, in dem sich das Elektron bewegt. Dadurch fluktuiert auch die räumliche Position des Elektrons, was indirekt die Energieverschiebung erklärt.

Die entsprechende Differenz der potenziellen Energie ist

$$\Delta V = V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = \delta\vec{r}\vec{\nabla}V + \frac{1}{2}(\delta\vec{r}\vec{\nabla})^2V(\vec{r}) + \dots$$

⁶Willis Lamb (★1913 Los Angeles, †2008 Tucson).

Die Fluktuationen sind isotrop,

$$\langle \delta \vec{r} \rangle_{\text{vac}} = 0$$

$$\langle (\delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{3} \langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} \cdot \vec{\nabla}^2,$$

und wir erhalten für die mittlere Differenz der potenziellen Energie

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} \langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} \left\langle \nabla^2 \left(\frac{-e^2}{r} \right) \right\rangle.$$

Die klassische Bewegungsgleichung für die Elektronenfluktuationen $(\delta \vec{r})_{\vec{k}}$, die durch das Feld mit Wellenvektor \vec{k} und Frequenz ω ausgelöst werden, ist

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2} (\delta \vec{r})_{\vec{k}} = -e E_{\vec{k}}};$$

dabei muss – damit Fluktuationen ausgelöst werden – die Frequenz ω größer als ω_0 im Bohr-Orbit sein,

$$\omega > \frac{\pi c}{a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} \quad (\omega = ck) : k > \frac{\pi}{a_0}, \quad k = (\text{Kreis-})\text{wellenzahl.}$$

Für ein mit ω oszillierendes Feld ist ($cc \equiv$ komplex konjugiert)

$$\delta r(t) \simeq \delta r(0) e^{-i\omega t} + cc$$

$$(\delta r)_{\vec{k}} \simeq \frac{e}{m c^2 k^2} E_{\vec{k}} = \frac{e}{m c^2 k^2} \varepsilon_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} + cc \right].$$

Summation über \vec{k} ergibt

$$\langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{m c^2 k^2} \right)^2 \langle 0 | (E_{\vec{k}})^2 | 0 \rangle = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{m c^2 k^2} \right)^2 \cdot \varepsilon_{\vec{k}}^2$$

mit $\varepsilon_{\vec{k}} = \left(\frac{\hbar c k 2\pi}{V} \right)^{1/2}$. Da \vec{k} kontinuierlich ist, wird aus der Summe ein Integral,

$$\langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int dk \cdot k^2 \left(\frac{e}{m c^2 k^2} \right)^2 \frac{\hbar c k 2\pi}{V} = \frac{2 e^2}{\pi \hbar c} \left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 \int \frac{dk}{k}.$$

Ohne Grenzen divergiert das Integral. Es muss jedoch gelten $k > \frac{\pi}{a_0}$, und die **Wellenlänge** muss größer sein als die reduzierte Compton-Wellenlänge des Elektrons,

$$\lambda > \lambda_e = \frac{\hbar}{mc}, \quad \text{oder} \quad k < \frac{mc}{\hbar}.$$

Dies definiert obere und untere Grenzen des Integrals,

$$\int_{\pi/a_0}^{mc/\hbar} \frac{dk}{k} = \ln\left(\frac{mca_0}{\hbar\pi}\right) = \ln\left(\frac{mch^2}{\hbar\pi me^2}\right) = \ln\left(\frac{\hbar c}{\pi e^2}\right),$$

so dass

$$\langle (\delta\vec{r})^2 \rangle_{\text{vac}} \simeq \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \ln\left(\frac{\hbar c}{\pi e^2}\right).$$

Im Coulomb-Potenzial ist

$$\left\langle \vec{\nabla}^2 \left(\frac{-e^2}{r} \right) \right\rangle = -e^2 \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) \psi(\vec{r}) = 4\pi e^2 |\psi(0)|^2$$

(mit $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r})$).

Für p -Orbitale verschwindet die nichtrelativistische Wellenfunktion am Ursprung, so dass es hier (im Rahmen dieser Abschätzung) keine Energieverschiebung gibt. Für s -Orbitale ist der Wert der Wellenfunktion am Ursprung

$$\psi_{2s}(0) = \frac{1}{(8\pi a_0^3)^{1/2}}$$

mit dem Bohr'schen Radius $a_0 = \frac{\hbar}{me^2} \simeq 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ fm}$

und der Unterschied in der potenziellen Energie wird

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{\hbar c}{\pi e^2}\right) \cdot \frac{e^2}{2a_0^3}$$

$$\simeq 260 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \hat{=} 629 \text{ MHz.}$$

Das Ergebnis dieser Abschätzung ist also bis auf einen Faktor 1,7 in der Größenordnung des experimentellen Wertes von 1058 MHz.

Im Rahmen der **Quantenelektrodynamik** (Kap. 9) lässt sich die Lamb-Shift genau berechnen: Sie kommt durch Emission und Re-Absorption virtueller Photonen im Kernfeld zustande.

Das **Feld** ist in der QED **quantisiert**, und ähnlich wie beim harmonischen Oszillator in der QM ist der niedrigste Energiezustand nicht bei $E = 0$: Als Folge der **Nullpunktsoszillationen** des Feldes macht das Elektron rasche oszillatorische Bewegungen im Feld über einen Bereich $r + \delta r$.

In der QED werden s -Zustände ($l = 0$) durch die Lamb-Shift angehoben, sind also schwächer gebunden

$$\boxed{\Delta E_{\text{Lamb}}^{l=0} = \alpha^5 \cdot m_e c^2 \frac{k(n,0)}{4n^3}}, \quad l=0; \quad k(n,0) \simeq 13,$$

während für Zustände mit $l \neq 0$ gilt

$$\Delta E_{\text{Lamb}}^{l \neq 0} = \alpha^5 m_e c^2 \frac{1}{4n^3} \left[k(n,l) \pm \frac{1}{\pi(j + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2})} \right], \quad l \neq 0, \quad j = l \pm \frac{1}{2}.$$

Der $2p_{1/2}$ -Zustand mit $l = 1$ und $j = l - 1/2$ wird demnach etwas abgesenkt, ist also stärker gebunden, und die Energiedifferenz wird

$$\Delta(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) \begin{cases} \Delta_{\text{Lamb}}^{\text{QED}} = 1057,864 \pm 0,014 \text{ MHz,} \\ \Delta_{\text{Lamb}}^{\text{exp}} = 1057,862 \pm 0,020 \text{ MHz,} \end{cases} \quad \text{mit } k(n,l) < 0,05.$$

Mit Hilfe der Lamb-Shift kann die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ für einen Präzisionstest der Quantenelektrodynamik auf $< 1\text{ppm}$ bestimmt werden. Auch die Lamb-Shift des $1s$ -Grundzustandes ist mit hoher Genauigkeit gemessen worden [6].

Literatur

- [1] Bransden, B.H., Joachain, C.J.: Introduction to Quantum Mechanics, Pearson/ Prentice Hall (2000)
- [2] Breit, G.: The Magnetic Moment of the Electron. *Nature* 122, 649 (1928)
- [3] Lamb, W.E., Retherford, R.C.: Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method. *Phys. Rev.* 72, 241 (1947)
- [4] Bethe, H.A.: The Electromagnetic Shift of Energy Levels. *Phys. Rev.* 72, 339 (1947)
- [5] Scully, M.O., Zubairy, M.S.: *Quantum Optics*, CUP (1997)
- [6] Weitz, M. et al.: Precision measurement of the $1S$ ground-state Lamb shift in atomic hydrogen and deuterium by frequency comparison. *Phys. Rev. A* 52, 2664 (1995)

7 Das Klein'sche Paradoxon

Eine sehr interessanter Aspekt der Dirac-Theorie ergibt sich beim Eindringen eines relativistischen Elektrons in eine Potenzialbarriere, wenn die Höhe der Barriere die Ruhemasse des Elektrons von $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$ übersteigt. Die Transmissionswahrscheinlichkeit wird dann unerwartet groß und hängt nur schwach von der Barrierenhöhe ab; geht die Barrierenhöhe gegen unendlich, wird nahezu perfekte Transparenz erreicht – in deutlichem Gegensatz zum Tunneln im nichtrelativistischen Fall, wo die Transmissionswahrscheinlichkeit mit steigender Barrierenhöhe exponentiell abnimmt.

Wir untersuchen dementsprechend die Streuung von Elektronen an einem Potentialsprung in der Dirac-Theorie. Wie von Klein⁷ 1929 vorgeschlagen [1], wird das Problem zunächst im Rahmen der Einteilcheninterpretation der DE untersucht.

Eine Elektronenmateriewelle propagiert mit Energie E längs der z -Achse und trifft auf eine Potenzialstufe der Höhe $V_0 > E$ (Abb. 7.1).

Die e^- -Geschwindigkeit ist vergleichbar mit c , $0,3c \leq v_e \leq c$.

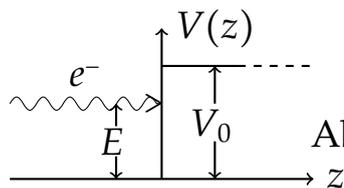


Abb. 7.1: Potenzialbarriere beim Klein'schen Paradoxon

Für das freie Elektron gilt

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \vec{p}^2 + m^2c^2.$$

In Gegenwart des Potentials ist

$$\left(\frac{E - V_0}{c}\right)^2 = \hat{p}^2 + m^2c^2, \text{ mit dem Elektronenimpuls } \hat{p} \text{ im Potenzial.}$$

⁷Oskar Benjamin Klein (★1894 Mörby, †1977 Stockholm).

Die DE ist dann (stationärer Fall) $0 = \bar{\alpha}\vec{p} + \beta mx + \frac{e\phi}{c}$.

$$\Rightarrow \left[\frac{E - e\phi}{c} - \beta mc \right] \psi + i\hbar \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0$$

und die adjungierte Gleichung

$$\bar{\psi} \left[\frac{E - e\phi}{c} - \beta mc \right] + i\hbar \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} \alpha_k = 0,$$

mit $e\phi = 0, \quad z < 0$

$$e\phi = V_0, \quad z > 0$$

und einer einlaufenden Elektronenwelle $p \uparrow \uparrow e_z$

$$\psi_i = u_i \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (pz - Et) \right\} \quad \text{wird für } \alpha \rightarrow \alpha_3 \text{ die DE}$$

$$\left\{ \frac{E}{c} - \alpha p - \beta mc \right\} u_i = 0 \quad \text{mit } E > 0 \text{ für einlaufende Wellen}$$

$$\text{und } \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} p \psi.$$

Die Amplitude der einlaufenden Welle ist $u_i \neq 0$, und mit $\alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0$ muss gelten

$$\frac{E}{c} = \alpha p + \beta mc$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 + \underbrace{(\alpha \beta + \beta \alpha)}_{=0} p m c.$$

Der Impuls der reflektierten Welle ist $-p$, der Impuls der transmittierten Welle ist $\hat{p} \equiv \hat{p}$ (in z -Richtung) mit $\left(\frac{E - V_0}{c} \right)^2 = \hat{p}^2 + m^2 c^2$.

Für kleines V_0 gilt

$$\psi_r = u_r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (-pz - Et) \right\}$$

$$\psi_t = u_t \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (-\hat{p}z - Et) \right\}$$

und aus der DE folgt mit $p \rightarrow -p$

$$\left\{ \frac{E}{c} + \alpha p - \beta mc \right\} u_r = 0, \text{ und mit } p \rightarrow \hat{p}$$

$$\left\{ \frac{E - V_0}{c} - \alpha \hat{p} - \beta mc \right\} u_t = 0.$$

Die Gesamtwellenfunktion muss kontinuierlich an der Grenzfläche sein,
d. h. für $z = 0$

$$u_i + u_r = u_t.$$

Daraus folgt mit der Gleichung für die einlaufende Welle u_i :

$$\left(\frac{E}{c} - \alpha p - \beta mc \right) u_i = 0 \Rightarrow \left(\frac{E}{c} - \beta mc \right) u_i = \alpha p u_i$$

und mit den Gleichungen für **reflektierte** und **transmittierte** Wellen

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc \right) u_r = -\alpha p \cdot u_r$$

$$\left(\frac{E - V_0}{c} - \beta mc \right) (u_i + u_r) = \alpha \hat{p} (u_i + u_r)$$

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc \right) (u_i + u_r) = \left(\frac{V_0}{c} + \alpha \hat{p} \right) (u_i + u_r)$$

sowie aus den ersten beiden Gleichungen durch Addition

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc \right) (u_i + u_r) = \alpha p (u_i - u_r),$$

so dass mit Hilfe der dritten Gleichung folgt

$$\left(\frac{V_0}{c} + \alpha\hat{p}\right)(u_i + u_r) = \alpha p(u_i - u_r)$$

$$\text{oder } \boxed{\left[\frac{V_0}{c} + \alpha(p + \hat{p})\right]u_r = -\left[\frac{V_0}{c} - \alpha(p - \hat{p})\right]u_i}.$$

Multipliziere beide Seiten mit $\frac{V_0}{c} - \alpha(p + \hat{p})$, benutze $\alpha^2 = 1$

und die Energie-Impuls-Beziehung $\left(\frac{E - V_0}{c}\right)^2 = \hat{p}^2 + m^2c^2$;

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$$

$$u_r = \frac{(2V_0/c)(-E/c + \alpha p)}{V_0^2/c^2 - (p + \hat{p})^2}u_i \equiv ru_i$$

und analog für die adjungierte Amplitude der reflektierten Welle,

$$u_r^+ = ru_i^+$$

⇒ Wahrscheinlichkeitsdichte für die reflektierte Welle:

$$u_r^+u_r = \left[\frac{2V_0/c}{V_0^2/c^2 - (p + \hat{p})^2}\right]^2 u_i^+ \left[-\frac{E}{c} + \alpha p\right]^2 u_i.$$

Aus den Bewegungsgleichungen für u_i und u_i^+ folgt die Identität

$$cu_i^+\alpha u_i = \frac{pc^2}{E}u_i^+u_i,$$

so dass wir die Amplitude der reflektierten Welle als Anteil R der Amplitude der einlaufenden Welle schreiben können: ($p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2$)

$$\begin{aligned} u_r^+u_r &= \left[\frac{2V_0/c}{V_0^2/c^2 - (p + \hat{p})^2}\right]^2 \left[\left(\frac{E^2}{c^2} + p^2\right)u_i^+u_i - \frac{2Ep}{c}u_i^+\alpha u_i\right], \\ &= \left[\frac{2V_0m}{V_0^2/c^2 - (p + \hat{p})^2}\right]^2 u_i^+u_i \equiv Ru_i^+u_i. \end{aligned}$$

Für $V_0 = 0 \Rightarrow R = 0$; alle Elektronen laufen durch,

für $V_0 = E - mc^2$ (d. h. $\hat{p} = 0$) $\Rightarrow R = 1$: Alle Elektronen werden reflektiert.
Für noch größere $V_0 > E - mc^2$ wird \hat{p} **imaginär**.

Wir setzen dann

$$\psi_t = u_t \exp \left[-\mu z - i \frac{E}{\hbar} t \right] \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

Es ist $\mu > 0$, da sonst die Dichte rechts der Barriere für $z \rightarrow \infty$ unendlich groß würde.

Andererseits ist mit

$$\begin{aligned} \psi_t &= u_t \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\hat{p}z - Et) \right\} \Rightarrow \boxed{\hat{p} = i\hbar\mu} \\ u_r &= -\frac{\left(\frac{2V_0}{c}\right) \left(\frac{E}{c} - \alpha p\right)}{\frac{V_0^2}{c^2} - (p + i\hbar\mu)^2} u_i, \quad u_r^+ = -\frac{\left(\frac{2V_0}{c}\right) \left(\frac{E}{c} - \alpha p\right)}{\frac{V_0^2}{c^2} - (p - i\hbar\mu)^2} u_i^+ \\ \Rightarrow u_r^+ u_r &= -\frac{\left(\frac{2V_0}{c}\right)^2 \left(\frac{E^2}{c^2} - p^2\right)}{\left[\left(\frac{V_0}{c} + p\right)^2 + \mu^2 \hbar^2\right] \left[\left(\frac{V_0}{c} - p\right)^2 + \mu^2 \hbar^2\right]} u_i^+ u_i \equiv R u_i^+ u_i. \end{aligned}$$

Mit den Energie-Impuls-Beziehungen

$$\begin{aligned} \left[\frac{(E - V_0)}{c} \right]^2 &= \hat{p}^2 + m^2 c^2, \quad \frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \quad \text{folgt} \\ \hat{p}^2 &= p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2}, \quad \text{und da } \hat{p}^2 = -\mu^2 \hbar^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{V_0}{c} \pm p \right)^2 + \mu^2 \hbar^2 &= 2 \frac{V_0}{c} \left(\frac{E}{c} \pm p \right) \Rightarrow \boxed{R = 1} \\ \Rightarrow \boxed{u_r^+ u_r = u_i^+ u_i}. \end{aligned}$$

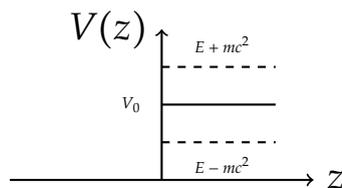


Abb. 7.2: Potentialschwelle beim Klein'schen Paradoxon

Für $E + mc^2 > V_0 > E - mc^2$ (Abb. 7.2) ist der an der Potentialschwelle reflektierte Strom ebenfalls gleich dem einfallenden. Hinter der Schwelle gibt es dort eine exponentiell abfallende Lösung. Bei **anwachsendem** V_0 wird \hat{p} – und damit μ wegen $\hat{p} = i\hbar\mu$ – erst größer, erreicht bei $E = V_0$ einen **Maximalwert** $\left[\text{wegen } \hat{p}^2 = p^2 - \frac{V_0(2E-V_0)}{c^2} \right]$ und fällt dann wieder ab; für $V_0 = E + mc^2$ wird $\mu = 0$.

Für $V_0 > E + mc^2$ wird \hat{p} wieder reell, jedoch ist die **kinetische Energie** $E - V_0$ **hier negativ**, so dass die Region rechts der Schwelle klassisch verboten ist. Quantenmechanisch kann ein Anteil der Welle in den Potenzialwall eindringen (analog zur nichtrelativistischen QM, jedoch hier bei relativistischen Energien \Rightarrow anderes physikalisches Verhalten).

Bei $V_0 = E + mc^2$ war der **Reflexionskoeffizient** $R = 1$ (\equiv Totalreflexion); für weiter **ansteigendes** V_0 nimmt er ab bis zum Minimalwert

$$R_{min} = \lim_{V_0 \rightarrow \infty} R(V_0) = \frac{(E/c - p)}{(E/c + p)}$$

und da Reflexion + Transmission = 1 ergeben muss, ist der Transmissionskoeffizient T :

$$T = \frac{2p}{E/c + p} \quad (R_{min} + T = \frac{E/c - p + 2p}{E/c + p} = 1).$$

Für große Elektronenimpulse p kann demnach der Bruchteil der Elektronen, der durch die Grenzfläche dringt, beträchtliche Werte annehmen:

Bei einem Impuls $p = mc$ und relativistischer Energie

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{2m^2 c^4} = \sqrt{2} mc^2 \simeq 1,4 \times \text{Ruheenergie}$$

$$\hat{=} \text{Elektronengeschwindigkeit } v_e = \frac{P}{E} = \frac{mc}{\sqrt{2} mc^2} \stackrel{c \equiv 1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$$

(71 % der Lichtgeschwindigkeit)

wird demnach der Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{2p}{E/c + p} = \frac{2mc}{E/c + mc} = \frac{2}{E/(mc^2) + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \simeq 0,83,$$

d. h. 83 % der einlaufenden Elektronen durchdringen die Potenzialbarriere.

Die großen T -Werte bleiben auch dann erhalten, wenn V_0 nur einige Ruhemassenwerte (nicht $V_0 \rightarrow \infty$) beträgt. Der in der Dirac-Theorie unerwartet große Transmissionskoeffizient motiviert die Bezeichnung **Klein'sches Paradoxon**⁸. Die zur Beobachtung des Phänomens erforderliche scharfe Barriere ist experimentell jedoch bis heute nicht realisierbar.

Rechnungen von Sauter [2] haben schon früh (1931) gezeigt, dass – entsprechend einer Vermutung von Bohr – die starke Transmission nicht stattfindet, wenn der Anstieg des Potentials allmählich ist, und (von $V = 0$ bis $V = V_0$) über eine Distanz von der Größenordnung der Comptonwellenlänge erfolgt, $V = vz$, $d \leq \frac{h}{mc}$. Wir untersuchen deshalb die Lösung der DE mit dem Potenzial $V = vz$ nach Sauter [2], s. Abb. 7.3.

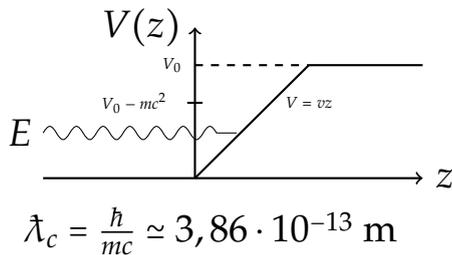


Abb. 7.3: Linear ansteigendes Potenzial

⇒ DE:

$$\left\{ \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_0 \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} + \kappa vz \right) + \kappa E_0 \right\} \psi = 0$$

mit $E_0 = mc^2$, $\kappa = \frac{2\pi}{hc}$

Ansatz: $\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}(xp_x + yp_y - Et)} \chi(z)$

$$\Rightarrow \left\{ \gamma_3 \frac{d}{dz} + \kappa \gamma_0 (vz - E) + \kappa (E_0 + ic\gamma_1 p_x + ic\gamma_2 p_y) \right\} \chi = 0$$

⇒ Lösung und Berechnung der Transmissionskoeffizienten wie in' [2].

Für $E > vz$ haben Impuls und Geschwindigkeit das gleiche Vorzeichen,

⁸nach Oskar Klein (★1894 Mörby, +1977 Stockholm).

für $E < v\zeta$ das entgegengesetzte Vorzeichen (die kinetische Energie wird negativ).

Dann wird der Transmissionskoeffizient $T = e^{-ik^2\pi}$, und $R \rightarrow 1$, für $K^2 \gg 1$ bis auf Glieder höherer Ordnung in $1/K^2$.

Hier ist

$$k = \sqrt{\frac{\kappa}{v}}K, \quad K^2 = E_0^2 + c^2(p_x^2 + p_y^2)$$

\Rightarrow Für alle elektrischen Felder, bei denen $K^2 \gg 1$ ist (das sind alle praktisch herstellbaren Felder), ist T verschwindend klein.

Der Wert von T hängt in erster Näherung nur von der Feldstärke (der Steilheit des Anstiegs) ab; erst für $k^2 \sim 1$ erhält man endliche Werte, entsprechend Feldern von $\geq 10^{16}$ Volt/cm.

Wegen $k^2 = \frac{2\pi}{hc} \frac{(mc^2)^2}{v}$ gilt für $k^2 \sim 1$

$$\boxed{\frac{v\hbar}{mc} \sim mc^2}$$

Man erhält demnach endliche Werte für T , wenn der Potenzialanstieg $v \frac{\hbar}{mc}$ auf einer Strecke im Bereich der Compton-Wellenlänge $\frac{\hbar}{mc}$ von der Größenordnung der Ruheenergie wird: Derart starke Felder lassen sich bis heute nicht herstellen.

Der Grenzfall eines unendlich steilen Potenzialanstiegs (O. Klein) kommt richtig heraus,

$$T \rightarrow \frac{2cp}{E + cp}$$

Im Rahmen der Quantenelektrodynamik berücksichtigt man, dass das für Elektronen repulsive Potenzial attraktiv für Positronen ist. Dementsprechend gibt es Positronenzustände in der Barriere, welche dieselbe Energie wie das äußere Elektronenkontinuum haben, und die Angleichung der Wellenfunktionen an der Barriere bewirkt die starke Trans-

mission. Entscheidend ist dabei die CP -Symmetrie von Elektron- und Positron-Zuständen.

Zum Stand aktuellerer Forschung über das Klein'sche Paradoxon s. *Seventy years of the Klein paradox* [3]. Eine neue und besonders interessante Anwendung ermöglichen Experimente auf der Basis elektrostatischer Barrieren in Graphen [4], mit denen ein genauer Test der Voraussagen gelingen könnte.

Literatur

- [1] Klein, O.: Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac. *Z. Physik* 53, 157 (1929)
- [2] Sauter, F.: Zum Klein'schen Paradoxon. *Z. Physik* 73, 547 (1931)
- [3] Dombey, N., Calogeracos, A.: *Seventy years of the Klein paradox*. *Phys. Rep.* 315, 41 (1999)
- [4] Katsnelson, M.I., Novoselov, K.S., Geim, A.K.: Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. *Nature Physics* 2, 620 (2006).

8 Dirac-Neutrinos: Die Weyl-Gleichung

8.1 Einleitung zu Neutrinos

Die Existenz des Neutrinos postulierte Pauli 1930 [1], um beim β -Zerfall durch schwache Wechselwirkung Energie- und Impulserhaltung zu gewährleisten. Dabei wird ein Neutron in ein Proton konvertiert (Abb. 8.1); ein Elektron und ein Antielektronneutrino werden ausgesandt

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Das Antineutrino $\bar{\nu}_e$ ist neutral, zunächst unbeobachtet und fast masselos. Es ist ein schwach wechselwirkendes Fermion mit Spin $1/2 \hbar$.

Auf dem Quarkniveau wird bei diesem Zerfall ein d -Quark durch W^- -Emission in ein u -Quark konvertiert: $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$.

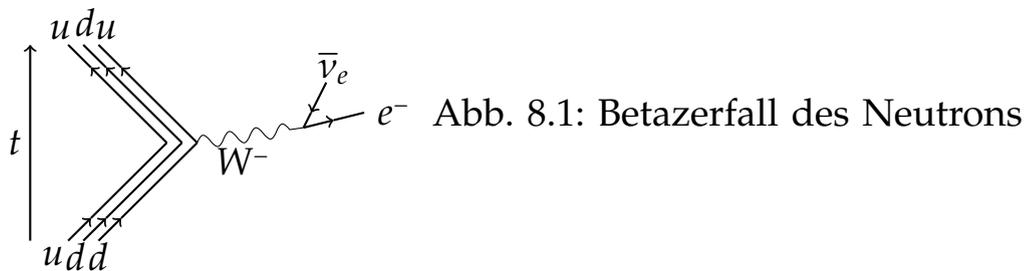


Abb. 8.1: Betazerfall des Neutrons

Beim β^+ -Zerfall wird unter Energiezufuhr ein Proton in ein Neutron konvertiert und ein Positron (e^+) und Elektronneutrino emittiert:

$$\text{Energie} + p \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$$

Anders als der β^- -Zerfall kann der β^+ -Zerfall nicht isoliert stattfinden, weil die Neutronenmasse größer als die Protonenmasse ist \Rightarrow die Bindungsenergie des Mutterkerns muss größer als die der Tochter sein.

Die Betazerfallsenergie hat einen festen Wert, das gemessene Elektronen-(Positronen-)Energiespektrum ist jedoch **kontinuierlich** (Abb. 8.2). Es muss deshalb beim Betazerfall einen dritten Zerfallspartner geben, da

die Gesamtenergie erhalten ist.

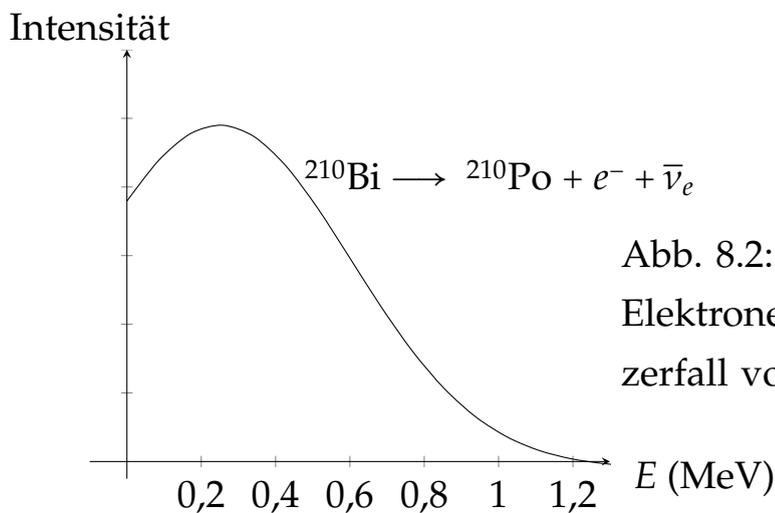


Abb. 8.2: Kontinuierliches Elektronenspektrum beim Betazerfall von ^{210}Bi

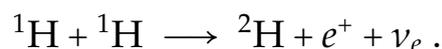
Das aus Energie- und Impulserhaltungsgründen erforderliche Antineutrino wurde erst 1956 von Cowan, Reines und Mitarbeitern (Nobelpreis für Physik 1995) nachgewiesen [2]: zunächst im Projekt Poltergeist in Hanford, ab 1956 in Savannah River mit $\bar{\nu}_e$ aus einem Reaktor und $0,5 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$. Man nutzt dabei den

$$\text{inversen Betazerfall: } \bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+.$$

Der Nachweis beider Teilchen im Ausgangskanal ist gleichbedeutend mit dem Neutrinonachweis. Sechs Jahre später (1962) gelang Danby et al. (Nobelpreis 1988 für Lederman, Schwartz und Steinberger) auch der Nachweis des Myon-Neutrinos ν_μ [3].

Es dauerte weitere 39 Jahre, bis die DONUT (Direct Observation of the NU Tau) Kollaboration am Fermilab im Jahr 2001 mit dem Tau-Neutrino ν_τ die dritte Neutrinoart dingfest machen konnte [4]. Es gibt nach heutigem Kenntnisstand demnach drei Neutrino flavours.

In der Sonne werden Elektroneutrinos ν_e erzeugt, v. a. im Prozess



Auf dem Weg zur Erde wandeln sie sich in die anderen Neutrino flavours

um \Rightarrow die Ruhemasse muss – wenn auch nur sehr wenig – von Null verschieden sein.

Für die Differenz der Massenquadrate von Elektron- und Myon-Neutrinos folgt [5]

$$\Delta m_{solar}^2 \simeq 7,53 \cdot 10^{-5} (\text{eV}/c^2)^2,$$

aus den Oszillationen atmosphärischer Myon-Neutrinos in Tau-Neutrinos

$$\Delta m_{atm}^2 \simeq 2,44 \cdot 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2.$$

Absolute Werte für die $\bar{\nu}_e$ -Masse lassen sich bisher nur aus ${}^3\text{H}$ (Tritium) β -Zerfallsexperimenten herleiten (obere Grenzen [5]),

$$m_{\bar{\nu}_e} < 2 \text{ eV}/c^2.$$

Mit dem Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment (KATRIN) soll diese Schranke in Zukunft auf $0,2 \text{ eV}/c^2$ verbessert werden [6]. Kosmologische Untersuchungen (Planck-Satellit zur Messung der Fluktuationen der kosmischen Hintergrundstrahlung) ergeben eine obere Schranke für die Summe der Massen aller Neutrino flavours von $0,23 \text{ eV}/c^2$ [7], jedoch nicht für einzelne Neutrinoarten. In jedem Fall ist die Elektron-Neutrinomasse sehr klein im Vergleich zur Elektronenmasse $m_e \simeq 5,11 \cdot 10^5 \text{ eV}/c^2$, d. h., $\frac{m_{\bar{\nu}_e}}{m_e} \leq 3,9 \cdot 10^{-6}$.

Es ist daher sinnvoll, eine Theorie für Fermionen mit $m \simeq 0$ zu untersuchen, wie sie als erster 1929 Weyl⁹ aufgestellt hat [8], um masselose Spin-1/2-Teilchen zu beschreiben. Anders als die Dirac-Gleichung hat sie nur zwei Komponenten und verletzt die Paritätsinvarianz. Sie wurde daher zunächst verworfen, aber nach der Entdeckung der Paritätsverletzung beim Betazerfall von ${}^{60}\text{Co}$ durch Wu et al. (1957, s. Kap. 5.2) von Landau [9], Salam [10], sowie Lee und Yang [11] wieder aufgegriffen.

⁹Hermann Weyl (★1885 Elmshorn, +1955 Zürich).

Genaue Untersuchungen des inversen Betazerfalls haben gezeigt, dass der Spin des Neutrinos stets antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung ausgerichtet ist (Abb. 8.3), der des Antineutrinos parallel zur Bewegungsrichtung (sonst wären die Wirkungsquerschnitte nur halb so groß wie die gemessenen Werte).

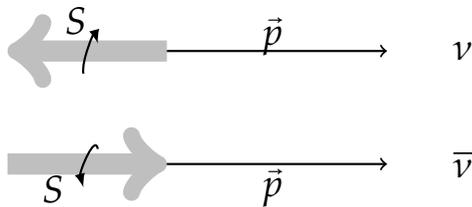


Abb. 8.3: Spin und Impulsrichtung von Neutrino und Antineutrino

8.2 Die Weyl-Gleichung

Betrachte zunächst die DE für ein masseloses Teilchen:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = c\vec{\alpha}\vec{p}\psi(x)} : \text{ der Term } +\beta mc^2 \text{ fällt weg.}$$

Die drei 2×2 -Pauli-Matrizen σ^k erfüllen die Antikommutationsrelationen

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}.$$

Die Forderung, auch β als vierte antikommutierende Matrix einzuführen und so Teilchen mit Masse (speziell: das Elektron) zu beschreiben, hatte bei Spin-1/2-Teilchen die Einführung von 4×4 -Matrizen und von Viererspinoren (zwei Zweierspinoren) zur Folge gehabt.

Bei masselosen Teilchen lässt sich dagegen (für Spin 1/2) eine Wellengleichung für einen Zweierspinor $\phi^+(x)$ konstruieren:

$$i\hbar \frac{\partial \phi^+}{\partial t} = c\vec{\sigma}\vec{p}\phi^+(x); \quad \sigma^k \hat{=} 2 \times 2\text{-Pauli-Matrizen}$$

und nach Division durch $i\hbar$ folgt

$$\boxed{\frac{\partial \phi^+}{\partial t} = -c\vec{\sigma}\vec{\nabla}\phi^+(x)} \quad \text{Weyl-Gleichung (für } \phi^+ \text{).}$$

Lösungen als ebene Wellen sind

$$\phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ipx/\hbar} u^+(p),$$

wobei

$$p = \{p_0, \vec{p}\} = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\}$$

$$x = \{x_0, \vec{x}\}$$

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \vec{p} \vec{x}.$$

Die Neutrinowellenfunktionen sind dabei so normiert, dass die Norm invariant unter Lorentz-Transformation ist.

Der zweikomponentige Spinor $u^+(p)$ erfüllt die Gleichung

$$\boxed{p_0 u^+ = \vec{\sigma} \vec{p} u^+},$$

d. h. die Lösung zu $p_0 c = E$ entspricht (je nach Vorzeichen der Energie E) einer bestimmten Orientierung des Spins $\vec{\sigma}$ relativ zwischen Bewegungsrichtung \vec{p} .

Wenden wir den **Helizitätsoperator** $\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{|\vec{p}|}$ auf beide Seiten der Gleichung für $u^+(p)$ an, so erhalten wir mit der Relation

$$(\vec{\sigma} \vec{A})(\vec{\sigma} \vec{B}) = \vec{A} \vec{B} + i \vec{\sigma} (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \vec{p})^2 \Rightarrow (p_0^2 - \vec{p}^2) u^+ = 0$$

\Rightarrow Es gibt nichtverschwindende Lösung für u nur für $\boxed{p_0 = \pm |\vec{p}|} = \frac{E}{c}$.

Das ist die relativistische Energie des masselosen Teilchens; die Teilchen bewegen sich dabei mit c . Mit der z -Achse in **Impulsrichtung** \vec{p} wird die Lösung von $p_0 u^+ = \vec{\sigma} \vec{p} u^+$:

$$\boxed{u^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}},$$

d. h. rechtshändige masselose Teilchen mit Spin in Bewegungsrichtung, also

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^+ = \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⇒ Der Helizitätsoperator hat einen positiven Eigenwert +1, der Spin ist deshalb parallel zu \vec{p} : das entspricht einer Rechtsschraube (Abb. 8.4), wenn wir in Bewegungsrichtung $\vec{p}/|\vec{p}|$ blicken:

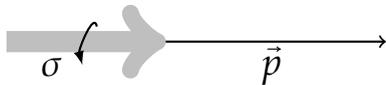


Abb. 8.4: Rechtsschraube

Das Neutrino ist jedoch eine Linksschraube.

⇒ Für Zustände mit positiver Energie $p_0 = +|\vec{p}|$ hat die Weyl-Gleichung nur Wellen mit positiver Helizität als Lösung, für Zustände mit negativer Energie $p_0 = -|\vec{p}|$ nur Wellen mit negativer Helizität.

Dies ist auch in der **Löchertheorie** gültig: Dort entspricht eine Wellenfunktion mit negativer Energie, negativem Impuls und negativer Spinrichtung einem **Antiteilchen** mit positiver Energie, positivem Impuls, und positiver Spinrichtung: Eine solche Zuordnung widerspricht den Experimenten zur schwachen Wechselwirkung:

Um also **masselose linkshändige** Teilchen beschreiben zu können, müssen wir von der Gleichung ausgehen

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \phi^-}{\partial t} = -c\vec{\sigma}\vec{p}\phi^-(x)} \quad \text{Weyl-Gleichung (für } \phi^- \text{)}.$$

Die Ersetzung $\vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$ liefert ebenfalls die Antikommutationsrelation $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$, so dass die Gleichung eine mögliche DE für masselose Spin-1/2-Teilchen ist.

Der Ansatz

$$\phi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ipx/\hbar} u^-(p)$$

liefert

$$p_0 u^- = -\vec{\sigma} \vec{p} u^-, \quad u^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wieder kann $p_0 = \frac{E}{c}$ positiv oder negativ sein; Die Lösung ϕ^- beschreibt linkshändige masselose Teilchen mit negativer Helizität, also Neutrinos im vereinfachten Modell mit $m_\nu \equiv 0$. Der Spin ist jetzt antiparallel zum Impuls (**Linksschraube**); für den **Antineutrinozustand** mit $p_0 < 0$ ist es umgekehrt (**Rechtsschraube**). Die Tatsache, dass sich die beiden Lösungen ϕ^- und ϕ^+ spiegelbildlich verhalten, bezeichnet man auch als Chiralität.

Betazerfallsexperimente zeigen, dass das Neutrino-Spin stets antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung steht: Die **Helizität** (oder longitudinale Polarisierung) eines **Neutrinos** mit positiver Energie ist **negativ**, bei negativer Energie dagegen positiv.

Da es bei den Lösungen ϕ^+ der Weyl-Gleichung umgekehrt war, lässt sich ϕ^+ mit dem Antineutrino von ϕ^- identifizieren. (Beachte jedoch, dass die Links-/Rechtshändigkeit der Lösungen nur für $m_\nu = m_{\bar{\nu}} \equiv 0$ gilt.)

Die Neutrinostromdichte erhalten wir aus

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi^-}{\partial t} - \vec{\sigma} \vec{\nabla} \phi^- = 0.$$

Bei Kombination von $\vec{\sigma}$ und \mathbb{I} zu einem Vierervektor $\sigma_\mu = \{\mathbb{I}, \vec{\sigma}\}$ lässt sich die Weyl-Gleichung kompakter schreiben:

$$\boxed{\sigma_\mu \nabla^\mu \phi^- = 0},$$

und die hermitesch konjugierte Gleichung wird

$$\nabla^\mu (\phi^-)^\dagger \sigma_\mu = 0.$$

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $(\phi^-)^+$, der zweiten von rechts mit ϕ^- und Addition ergibt

$$\boxed{\nabla^\mu (\phi^-)^+ \sigma_\mu \phi^- = 0} \hat{=} \text{Kontinuitätsgleichung für den Viererstrom}$$

$$j_\mu = (\phi^-)^+ \sigma_\mu \phi^-,$$

mit den zeitartigen und raumartigen Komponenten

$$\varrho = (\phi^-)^+ \phi^-$$

$$\vec{j} = -(\phi^-)^+ \sigma \phi^-.$$

Die Normierungskonstante der Neutrिनowellenfunktion folgt aus

$$\int \varrho d^3x = 1.$$

Die zweikomponentige Weyl-Theorie ist **nicht invariant gegenüber Paritätstransformation**.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\ \vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ein Zustand mit Energie } p_0 = |\vec{p}|, \\ \text{Impuls } \vec{p}, \\ \text{Helizität } \vec{\sigma}\vec{p}/|\vec{p}| = 1 \end{array}$$

wird dadurch transformiert in einen Zustand mit $p_0 = |\vec{p}|$, Impuls $-\vec{p}$, Helizität -1 . Ein derartiger Zustand existiert jedoch nicht in dieser zweikomponentigen Theorie masseloser Spin-1/2-Teilchen. Demnach muss die P -Invarianz in der Weyl-Theorie verletzt sein.

Literatur

- [1] Pauli, W.: Offener Brief an die Gruppe der Radioaktiven (4. Dez. 1930). <http://www.library.ethz.ch/exhibit/pauli/neutrino.html>
- [2] Cowan Jr., C.L., Reines, F., Harrison, F.B., Kruse, H.W., McGuire, A.D.: Detection of the Free Neutrino: a Confirmation. Science. 124, 103 (1956)

- [3] Danby, G., Gaillard, J.-M., Goulianos, K., Lederman, L.M., Mistry, N.B., Schwartz, M., Steinberger, J.: Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Phys. Rev. Lett.* 9, 36 (1962)
- [4] Kodama, K. et al. (DONUT Collaboration): Observation of tau neutrino interactions. *Phys. Lett. B* 504, 218 (2001)
- [5] Olive, K.A. et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics. *Chin. Phys. C* 38, 090001 (2014)
- [6] Wolf, J. (KATRIN Collaboration): The KATRIN neutrino mass experiment. *Nuclear Instr. and Methods in Phys. Res. A* 623, 442 (2010)
- [7] Ade, P.A.R. et al. (Planck Collaboration): Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *arXiv:1502.0159* (2015), submitted to *Astron.& Astrophys.*
- [8] Weyl, H.: Elektron und Gravitation I, *Z. Physik*, 56, 330 (1929)
- [9] Landau, L.: On the conservation laws for weak interactions. *Nucl. Phys.* 3, 127 (1957)
- [10] Salam, A.: On Parity Conservation and Neutrino Mass. *Il Nuovo Cim.* 5, 299 (1957)
- [11] Lee, T.D., Yang, C.N.: Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino. *Phys. Rev.* 105, 1671 (1957)

9 Grundzüge der Quantenfeldtheorie

9.1 Einführung

Dirac-Gleichung und **Maxwell-Gleichungen** liefern gemeinsam eine Theorie des Elektromagnetismus. Dabei müssen jedoch die **Quantenpostulate** berücksichtigt – d. h. das Feld quantisiert – werden; die daraus resultierende Quantenfeldtheorie des Elektromagnetismus heißt **Quantenelektrodynamik, QED**.

Die QED beschreibt alle Phänomene, die von geladenen Punktteilchen wie Elektronen und Positronen und von Photonen verursacht werden. Sie umfasst Quantenphänomene in der Struktur der Atome und Moleküle und auch Vorgänge in der Hochenergiephysik wie die Erzeugung von Teilchen durch ein elektromagnetisches Feld. Die Berechnung des anomalen **magnetischen Moments** des Elektrons auf 12 Dezimalstellen ist der beste Erfolg der QED. Sie ist die am genauesten experimentell überprüfte physikalische Theorie.

In diesem Kapitel werden Aspekte von Quantenfeldtheorien – speziell der QED – diskutiert, die jedoch einen ausführlichen Kurs zu diesem Thema nicht ersetzen, siehe dazu die allgemeine Lehrbuchliteratur in der Bibliographie (Kap. 12), sowie speziellere Literatur [1, 2, 3, 4].

Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes – die dann quantisiert werden müssen – sind die Maxwell-Gleichungen, die Ampère'sches, Faraday'sches und Gauß'sches Gesetz zusammenfassen und erweitern (hier im Gauß-System):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0: \quad (\nexists \text{ magn. Monopole})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho.$$

Die Coulomb-Energie zwischen zwei Elektronen ist (Abstand r)

$$E_C = \frac{e^2}{r} \quad ,$$

die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung ist durch die dimensionslose Kopplungskonstante [5]

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,03599074(44)} \simeq \frac{1}{137,036}$$

charakterisiert, die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante. Bei einer hochenergetischen Teilchenkollision im Beschleuniger steigt mit wachsendem Impulsübertrag Q^2 die effektive Kopplungsstärke an, bei $Q^2 \simeq m_W^2 \cong 6,4 \text{ TeV}^2$ beträgt sie etwa $1/128$.

Informationen über eine mögliche Zeitabhängigkeit von α sind bis heute unklar. Aus Absorptionslinien des Lichts entfernter Quasare im Rotverschiebungsbereich $z = 3,5 - 0,5$ (23 % – 87 % des Alters des Universums) wurde eine Abweichung $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \simeq -0,54 \cdot 10^{-5}$ deduziert ($s_{1/2} \rightarrow p_{1/2,3/2}$ Übergänge) [6], d. h., α hätte im frühen Universum einen Wert von $\sim 1/137,037$ statt $1/137,036$ gehabt.

Messungen mit Atomuhren, insbesondere Frequenzverhältnisse von Quecksilber- und Aluminiumuhren [7] ergaben jedoch $|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}| < 1,6 \cdot 10^{-17}$ für die jährliche Variation. Wenngleich noch Unsicherheiten hinsichtlich der Relevanz dieser Labormessungen bei $z = 0$ für die Extrapolation auf

kosmologische Zeiten bestehen, ist α mit einiger Wahrscheinlichkeit zeitlich konstant.

Auch das Massenverhältnis von Proton und Elektron wurde auf mögliche Variationen untersucht: Es wurde 2015 anhand der Spektrallinien eines entfernten Quasars (Rotverschiebung $z = 4,42$, entsprechendes Alter des Universums etwa 1,4 Mrd. Jahre, also 10 % des Gesamtalters) gemessen [8]. Mögliche Abweichungen sind demnach kleiner als $9,5 \cdot 10^{-6}$.

Die Kleinheit der Kopplungskonstanten, $\alpha \simeq 0,0073$, ist entscheidend für den Erfolg der QED, bei der Reihenentwicklungen in α gemacht werden. Beispielsweise liefert die Theorie für die Anomalie a_e des magnetischen Moments μ_e des Elektrons [9]

$$\mu_e = \frac{1}{2} g_e \frac{e}{2mc}, \quad g_e = 2(1 + a_e),$$

$$a_e^{th} = 0,00115965218178(77).$$

Für den experimentellen Wert erhält man ([10], 2011)

$$a_e^{exp.} = \frac{1}{2}(g_e - 2)^{exp} = 0,00115965218073(28).$$

Zur Bestimmung des theoretischen Wertes macht man eine **Reihenentwicklung in α** mit Entwicklungskoeffizienten C_k ,

$$a_e = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi}}_{\simeq 0,00116} + C_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots$$

Schwinger hat 1948 als Erster den Term $\alpha/(2\pi)$ berechnet [11]. Inzwischen sind die Entwicklungskoeffizienten bis C_{10} numerisch berechnet worden. Zusammen mit dem experimentellen Wert [10] des g -Faktors g_e^{exp} (bzw. a_e^{exp}) folgt daraus der bisher genaueste Wert für die Feinstrukturkonstante [9]

$$\alpha^{-1} = 137,035999173(35).$$

Kombiniert man dieses Ergebnis mit anderen Messungen, ergab sich dabei 2014 ein Mittelwert von $\alpha^{-1} = 137,035999074(44)$, s. Particle Data Group [5].

Auch die Anomalie des magnetischen Moments des Myons lässt sich in der QED – zusammen mit Beiträgen der starken und elektroschwachen Wechselwirkung – berechnen. Das Resultat liegt allerdings mehr als drei Standardabweichungen unter dem bisher (2014) auf 0,54 ppm genau bekannten Messwert [5]. Bei den Experimenten am Brookhaven National Laboratory bestimmte man dabei die Anomalie aus der Präzession des Myonspins in einem Speicherring, der sich in einem konstanten externen magnetischen Feld befindet [12] – wie schon in früheren Experimenten am CERN [13]. Die experimentelle Genauigkeit soll in zukünftigen *Muon g-2* Experimenten am Fermilab (ab 2016) [14] und parallel dazu am japanischen J-PARC Forschungszentrum weiter verbessert werden. Sollte die Diskrepanz bestehen bleiben gibt es die Hoffnung, hier Physik jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik zu finden.

Physikalisches Bild der Quantenelektrodynamik

In der **klassischen Elektrodynamik** emittieren beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung (Abb. 9.1) – ein Elektron in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung kann dagegen kein Photon emittieren (Energie-Impuls-Erhaltung).

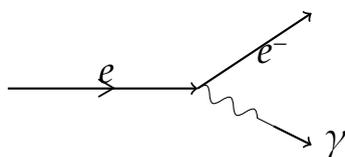


Abb. 9.1: Abstrahlung eines Photons durch eine beschleunigte Ladung

In der **Quantentheorie** gilt jedoch die Energie-Zeit-Unschärferelation,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

so dass auch ein ruhendes Elektron ein Photon aussenden kann: Die Verletzung der Energieerhaltung ist erlaubt, wenn das Photon nach einer Zeit $\Delta t \simeq \hbar/(\Delta E)$ (Abb. 9.2) wieder absorbiert wird.

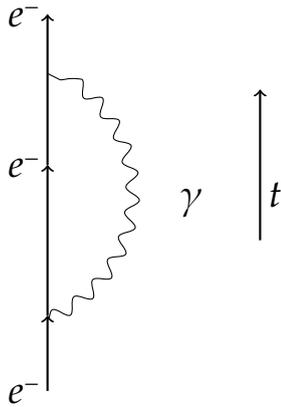


Abb. 9.2: Abstrahlung und Reabsorption eines virtuellen Photons während Δt

Derartige temporär existierende Photonen nennt man **virtuelle Photonen**. In der QED ist jedes geladene Teilchen von einer Wolke virtueller Photonen umgeben. Die **Amplitude** für die γ -Emission ist $\propto e$, die Wahrscheinlichkeit $\propto \alpha$. Der **Dirac-Wert** für das magnetische Moment des Elektrons mit $g_e = 2$ (s. Kap. 4.6) entspricht einem nackten Elektron. Wird ein virtuelles Photon emittiert, entsteht ein **Rückstoß**, und da das Elektron geladen ist, eine Stromverteilung; dieser Konvektionsstrom liefert einen Zusatz zum Dirac-Wert. Da die Wahrscheinlichkeit, ein virtuelles Photon zu finden, proportional zu α ist, sind sowohl der Strom, als auch der Beitrag zu g_e in erster Ordnung proportional zu α , wie in **Schwingers** Resultat [11].

Der Rückstoß kann auch so erfolgen (Abb. 9.3), dass das Elektron in der Zeit zurückläuft: Bei (1) entsteht ein e^-e^+ -Paar mit Aussendung eines virtuellen Photons; das e^- läuft ins Unendliche, das e^+ wird mit dem einlaufenden e^- unter Re-Absorption des virtuellen Photons bei (2) vernichtet.

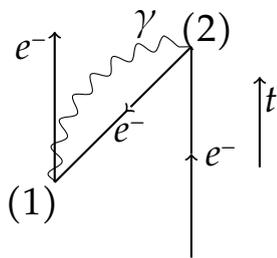


Abb. 9.3: Positron als in der Zeit zurücklaufendes Elektron

Die Interpretation von in der Zeit zurücklaufenden Elektronenlinien als Positronen hat **Stückelberg** 1941 vorgeschlagen [15].

Auch andere Effekte wie die **Lamb-Shift** (Kap. 6) und der **Casimir-Effekt** [20] lassen sich durch den Einfluss der virtuellen Photonen verstehen. Die **quantitative** Berechnung erwies sich als schwierig: Es ergeben sich unendliche Resultate, wenn man nach der Störungstheorie wie in der nicht-relativistischen QM vorgeht. Die von Feynman [16], Schwinger [17, 18] und Tomonaga [19] entwickelte **Renormierungstheorie** löst dieses Problem (Nobelpreis 1965, *for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing consequences for the physics of elementary particles*). Die **Quantenchromodynamik** und die Theorie der **elektroschwachen Wechselwirkung** sind ebenfalls grundsätzlich nach dem Muster der QED konstruiert, beruhen aber im Gegensatz zur QED auf nichtabelschen Eichgruppen. Dort gibt es Selbstkopplungsterme, die der Wechselwirkung der Eichteilchen (Gluonen in der QCD, W- und Z-Bosonen bei der elektroschwachen Wechselwirkung) untereinander entsprechen.

9.2 Kanonische Quantisierung

Das einfachste Verfahren zur Feldquantisierung ist die **kanonische Quantisierung**, bei der man wieder das Korrespondenzprinzip nutzt. Im Einteilchen-Fall – der **ersten Quantisierung** – bedeutet das, die verallgemeinerten Koordinaten q_i, p_i durch Operatoren zu ersetzen, die zur gleichen Zeit t die Vertauschungsrelationen erfüllen

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}.$$

Bei der **Feldquantisierung** – auch **zweite Quantisierung** genannt – zeichnet man in kanonischer Quantisierung wieder die Zeit als spezielle Koordinate aus. Für den einfachen Fall eines skalares Feldes ϕ wird dann das konjugierte Feld $\pi(\vec{x}, t)$ mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(t)$

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(x, t)} = \dot{\phi}(x, t)$$

und die Hamilton-Dichte ist

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2].$$

Die Feldoperatoren ϕ, π sollen nun bei Quantisierung bosonischer Felder wie dem elektromagnetischen Feld die folgenden Vertauschungsrelation erfüllen (das Operatorzeichen $\hat{}$ wird im folgenden weggelassen)

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Dies lässt sich durch Wahl einer Fourier-Darstellung für die Feldoperatoren mit operatorwertigen Entwicklungskoeffizienten erreichen

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int d^3k [a^+(\vec{k})e_k^* + a(\vec{k})e_{\vec{k}}], \\ \pi(\vec{x}) &= \int d^3k [a^+(\vec{k})e_k^* - a(\vec{k})e_{\vec{k}}] \end{aligned}$$

mit

$$e_{\vec{k}}(\vec{x}) = \exp(-i\vec{k}\vec{x}) / \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}.$$

In dieser Entwicklung (der sogenannten **Besetzungszahldarstellung**) interpretieren wir die Operatoren $a^+(\vec{k})$ als **Erzeugungsoperatoren**, $a(\vec{k})$ als **Vernichtungsoperatoren** eines Feldquants mit Dreierimpuls \vec{k} :

$$a^+(\vec{k}) |0\rangle = |\vec{k}\rangle$$

erzeugt aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ den Einteilchenzustand $|\vec{k}\rangle$. Es können aber auch Mehrteilchenzustände erzeugt werden:

$$a^+(\vec{k}_1) \dots a^+(\vec{k}_N) |0\rangle = |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_N\rangle.$$

Entsprechendes gilt für die Operatoren $a(\vec{k})$ bei der Vernichtung eines Feldquants mit Dreierimpuls \vec{k} – mit der zusätzlichen Bedingung, dass im Vakuumzustand keine Teilchenvernichtung möglich ist:

$$a(\vec{k}_1) \dots a^+(\vec{k}_N) |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_N\rangle = |0\rangle,$$

$$a(\vec{k}_i) |0\rangle = |0\rangle.$$

(Die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für das freie Photonenfeld werden in Kap. 9.3 diskutiert).

Bei fermionischen Feldern wie dem Dirac-Feld geht man analog vor, nur benötigt man jetzt vier unterschiedliche Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren – je zwei für Teilchen und Antiteilchen. Zusätzlich müssen wir dort das Pauli-Prinzip beachten: Es kann stets nur **ein** Teilchen oder Antiteilchen einen Energiezustand mit definiertem Spin besetzen. Technisch geschieht das durch Ersetzen der **Vertauschungsrelationen** durch **Antivertauschungsrelationen**.

Die kanonische Quantisierung ermöglicht zwar den einfachsten Zugang zur Feldquantisierung und quantisiert nur physikalische Zustände, sie ist jedoch als Folge der Auszeichnung der Zeit zunächst nicht Lorentz-invariant. Im nächsten Kapitel wird deshalb bei der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes ein Verfahren eingesetzt, das Raum- und Zeit-Koordinaten in gleicher Weise behandelt und dementsprechend Lorentz-invariant ist, bei dem jedoch auch *unphysikalische Zustände* – vier linear unabhängige Polarisationszustände beim Photon, das nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade hat – quantisiert werden. Die *physikalischen* Zustände werden dann ausgewählt, indem man die **Lorenz-Bedingung** als Nebenbedingung für Zustände fordert.

9.3 Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Das elektromagnetische Strahlungsfeld ist ein bosonisches Feld, da die Feldquanten – Photonen – Spin-1-Teilchen sind. Bei der Feldquantisierung müssen demnach die Regeln für die Quantisierung von Bose-Feldern angewandt werden, mit den entsprechenden Vertauschungsregeln für die Feldoperatoren.

In der relativistischen Formulierung fassen wir zunächst elektrische und magnetische Feldstärke zum Feldstärketensor zusammen, Ladungs- und Stromdichte zur Viererstromdichte:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Feldstärketensor;}$$

mit μ =Zeile, ν =Spalte, $j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ Viererstromdichte.

Skalares Potenzial ϕ und Vektorpotenzial \vec{A} bilden das Viererpotenzial

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}.$$

Die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ wird mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Aus dem Viererpotenzial folgen die Felder \vec{E} und \vec{B} ,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2$$

$$E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} = -\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1,$$

und der antisymmetrische Feldtensor wird

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

mit $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ und den oben gezeigten Komponenten.

Dabei gibt es in A^μ noch die Eichfreiheit (s. Kap. 3.2)

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x).$$

Maxwell-Gleichungen

Mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ ist

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} j^0.$$

Die 1-Komponente von

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{wird } \frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^1$$

und analog für die anderen Komponenten. Insgesamt ergibt sich:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}, \quad \text{oder} \quad \boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu}.$$

Mit der Potenzialdarstellung des Feldstärketensors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \text{ folgt}$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

In der **Lorenz-Eichung** ist

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0,$$

d. h. die Divergenz des Viererpotenzials verschwindet in der Lorenz-Eichung, und die $F^{\mu\nu}$ sind jetzt eindeutig festgelegt.

Daraus folgen die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad \square A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$$

mit dem d'Alembert-Operator $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$.

Analog für die **homogenen Maxwell-Gleichungen**:

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{\nabla} \vec{B} = 0} &\Rightarrow \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0 \\ &\Rightarrow -\partial_1 F^{32} - \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{12} = 0 = \partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} - \partial_3 F^{21} \\ \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} &. \end{aligned}$$

Für die x -(1-)Komponente:

$$\partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23} = 0, \text{ etc. für } y, z (2, 3).$$

Zusammengefasst folgt

$$\boxed{\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0} \quad \text{Bianchi-Identität}$$

(nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu$ nicht trivial: für gleiche Indizes identisch erfüllt).

Dies lässt sich mit Hilfe des dualen Feldtensors $\tilde{F}^{\mu\nu}$ analog wie bei den inhomogenen Gleichungen ausdrücken:

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \quad \text{mit} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} F_{\lambda\varrho}$$

und dem Levi-Civita-Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho}$, s. Einleitung.

Im Hinblick auf die **Feldquantisierung** untersuchen wir nun das freie Photonenfeld ohne äußere Quellen: $j^\nu \equiv 0$. Das Viererpotenzial erfüllt dann die d'Alembert-Gleichung

$$\boxed{\square A^\mu = 0}.$$

In der Quantentheorie ist das eine **Operatorgleichung**: Für den Feldoperator A_μ gilt eine Entwicklung mit operatorwertigen Entwicklungskoeffizienten,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu^+(\vec{k}) + e^{-ikx} a_\mu(\vec{k}) \right\},$$

wobei

$$k = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \omega = |\vec{k}|, \quad kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k}\vec{x}$$

und die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ , a für Bosonen in der Entwicklung des Feldoperators sind:

$$\begin{aligned} [a_\mu^+(\vec{k}), a_\nu^+(\vec{k}')] &= 0 \\ [a_\mu(\vec{k}), a_\nu(\vec{k}')] &= 0 \\ [a_\mu(\vec{k}), a_\nu^+(\vec{k}')] &= Z_{\mu\nu} (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

mit zunächst noch unbekanntem konstanten $Z_{\mu\nu}$.

Für den Vakuumzustand im Fock-Raum – dem quantenmechanischen Hilbert-Raum für Vielteilchensysteme mit variabler Teilchenzahl – gilt (s. Kap.9.2)

$$a_\mu(\vec{k}) |0\rangle = 0 \quad \forall \mu, k,$$

die Indizes μ, ν sind Vierervektorindizes, und die Konstanten $Z_{\mu\nu}$ bilden einen Lorentz-Tensor zweiter Stufe. Wegen der jetzt geforderten **Lorentz-Kovarianz** muss er ein **konstanter** Tensor sein; der einzige Tensor dieser

Art ist der **metrische Tensor**

$$\Rightarrow (Z_{\mu\nu}) = \pm(g_{\mu\nu}) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bei Wahl des negativen Vorzeichens wird die Vertauschungsrelation zwischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\left[a_{\mu}(\vec{k}), a_{\nu}^{\dagger}(\vec{k}') \right] = -g_{\mu\nu} (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

und a_{μ}^{\dagger} angewandt auf das Vakuum ergibt für $\mu = 1, 2, 3$ einen Zustand positiver Norm. Es lässt sich nun zeigen, dass die nullte Komponente angewandt auf das Vakuum ($a_0^{\dagger} |0\rangle$) dann einen Zustand *negativer* Norm zur Folge hat, so dass die Wahrscheinlichkeitsinterpretation nicht gilt.

Demnach bleibt die Metrik zunächst unbestimmt. Gupta [21] und Bleuler [22] haben jedoch bereits 1950 ein Verfahren angegeben, um Zustände positiver Norm zu erzeugen (und gleichzeitig zwei der vier linear unabhängigen Polarisationszustände zu eliminieren – denn ein reelles Photon hat nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade).

Bei der Feldquantisierung müssen wir berücksichtigen, dass die d'Alembert-Gleichung für A^{μ} nur zusammen mit der **Lorenz-Bedingung**

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$$

äquivalent zur Maxwell-Gleichung ist. Deshalb soll nun zusätzlich die Lorenz-Bedingung in die Quantenmechanik übertragen werden. Sie kann allerdings nicht direkt in Operatorform gebracht werden, man fordert stattdessen ihre Gültigkeit als **Nebenbedingung für Zustände**:

Nur diejenigen Zustände im Fock-Raum sind physikalische Zustände, welche die Lorenz-Bedingung erfüllen. Im folgenden ist in in Anlehnung

an die Darstellung von Nachtmann in [23] skizziert, wie sich dies realisieren lässt.

Wir berücksichtigen nur den Teil des Potenzialoperators, der Vernichtungsoperatoren enthält,

$$A_{\mu}^{-}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{-ikx} a_{\mu}(\vec{k}) \quad (1)$$

und fordern die Gültigkeit der Lorenz-Bedingung bei Anwendung auf physikalische Zustände

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{(-)}(x) |\text{phys. Zustand}\rangle = 0$$

bzw. für die Fourier-Komponenten

$$k^{\mu} a_{\mu}(\vec{k}) |\text{phys. Zustand}\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$$

\Rightarrow der Erwartungswert der Divergenz des gesamten Feldes $\partial^{\mu} A_{\mu}(x)$ verschwindet für beliebige physikalische Zustandsvektoren:

$$\langle \text{phys. Zustand} | \partial^{\mu} A_{\mu}(x) | \text{phys. Zustand} \rangle = 0.$$

(Anteil in $\partial^{\mu} A_{\mu}(x)$ mit Erzeugungsoperatoren nach links wirken lassen).

Der **Unterraum** der physikalischen Zustandsvektoren ist **linear**. Seine Metrik ist positiv semidefinit:

$$\langle \text{phys. Zustand} | \text{phys. Zustand} \rangle \geq 0$$

Beweis:

Wähle eine neue Basis für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

Einheitsvektoren: $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \perp \vec{k}$; $\vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \hat{k}$, $\Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

Operatoren:

$$\alpha_0^+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha_0^+(\vec{k}) - \hat{k} \alpha^+(\vec{k}) \right]$$

$$\alpha_1^+(\vec{k}) = \vec{e}_1 \alpha^+(\vec{k})$$

$$\alpha_2^+(\vec{k}) = \vec{e}_2 \alpha^+(\vec{k})$$

$$\alpha_3^+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha_0^+(\vec{k}) + \hat{k} \alpha^+(\vec{k}) \right].$$

Aus den Vertauschungsregeln für die a 's folgen die VR für die α 's:

$$\left[\alpha_0(\vec{k}), \alpha_0^+(\vec{k}') \right] = \left[\alpha_3(\vec{k}), \alpha_3^+(\vec{k}') \right] = 0$$

$$\left[\alpha_0(\vec{k}), \alpha_3^+(\vec{k}') \right] = \left[\alpha_3(\vec{k}), \alpha_0^+(\vec{k}') \right] = -(2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\left[\alpha_1(\vec{k}), \alpha_1^+(\vec{k}') \right] = \left[\alpha_2(\vec{k}), \alpha_2^+(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

(alle anderen Kommutatoren = 0).

Die Lorenz-Bedingung als Nebenbedingung wird damit

$$\alpha_0(\vec{k}) |\text{phys. Zustand}\rangle = 0.$$

Ein Zustandsvektor im Hilbert-Raum lässt sich als beliebiges Produkt von Erzeugungsoperatoren angewandt auf das Vakuum darstellen:

$$\alpha_1^+(\vec{k}_1) \alpha_1^+(\vec{k}_2) \cdots \alpha_2^+ \cdots \alpha_0^+ \cdots \alpha_3^+ \cdots |0\rangle$$

jedoch ist die Lorenz-Bedingung wegen der Vertauschungsregeln dann und nur dann erfüllt, wenn dabei *kein* Operator α_3^+ vorkommt.

Physikalische Zustandsvektoren sind z. B.

$$\alpha_1^+(\vec{k}) |0\rangle, \alpha_2^+(\vec{k}) |0\rangle, \alpha_0^+(\vec{k}) |0\rangle,$$

sie sind zueinander orthogonal, die Längenquadrate sind ≥ 0 :

$$\langle 0 | \alpha_1(\vec{k}) \alpha_1^+(\vec{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\langle 0 | \alpha_2(\vec{k}) \alpha_2^+(\vec{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\langle 0 | \alpha_0(\vec{k}) \alpha_0^+(\vec{k}') | 0 \rangle = 0.$$

Auch alle anderen Längenquadrate von Zustandsvektoren, die kein α_3^+ enthalten (physikalische Zustände), sind ≥ 0 :

$$\langle \text{phys. Zustand} | \text{phys. Zustand} \rangle \geq 0$$

(s. auch Literatur zur Diskussion des Hilbert-Raumes mit positiv definierter Metrik/Äquivalenzklassen von Zustandsvektoren).

Mit Berücksichtigung der **Quantenpostulate** durch die **Vertauschungsrelationen** lassen sich nun **Erwartungswerte** physikalischer Größen berechnen. Insbesondere werden die Erwartungswerte der elektrischen und magnetischen Feldstärken

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \dot{\vec{A}} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} : \\ \langle \vec{E}(x) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ -i\omega e^{ikx} \left\langle \vec{e}_1 \alpha_1^+(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2^+(\vec{k}) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + i\omega e^{-ikx} \left\langle \vec{e}_1 \alpha_1(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2(\vec{k}) \right\rangle \right\}, \\ \langle \vec{B}(x) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} \left\langle -i\vec{k} \times \left[\vec{e}_1 \alpha_1^+(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2^+(\vec{k}) \right] \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{-ikx} \left\langle i\vec{k} \times \left[\vec{e}_1 \alpha_1(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2(\vec{k}) \right] \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Es tragen – in Übereinstimmung mit dem Experiment – nur die transversalen Freiheitsgrade der Photonen bei. Die Operatoren für Energie und Impuls von Photonen folgen aus den klassischen Ausdrücken,

$$\begin{aligned} P^0 &= \int_{t = \text{const}} d^3x \cdot \frac{1}{2} [\vec{E}^2(x) + \vec{B}^2(x)] \\ \vec{P} &= \int_{t = \text{const}} d^3x [\vec{E}(x) \times \vec{B}(x)]. \end{aligned}$$

Mit \vec{E} und \vec{B} als Feldoperatoren lassen sich die Erwartungswerte von Energie und Impuls berechnen – jedoch ergeben sich zunächst **divergente Resultate**. Um sie zu vermeiden, ersetzen wir den Energieoperator

durch

$$P^0 \equiv P'^0 - \langle 0 | P'^0 | 0 \rangle,$$

d. h., wir wählen die **Vakuumenergie** als **Nullpunkt** der Energiezählung (das ist o. k., denn gemessen werden **Energiedifferenzen**).

Die Erwartungswerte des neuen Energieoperators sind **nicht divergent**. Die Subtraktion der Vakuumenergie erfolgt automatisch, wenn wir das **normalgeordnete** Produkt der Feldoperatoren verwenden (Doppelpunkte): Alle **Erzeugungsoperatoren** wirken so, als stünden sie links von allen **Vernichtungsoperatoren**, also z. B.

$$\boxed{: aa^+ : \equiv a^+ a} \quad \text{Normalprodukt .}$$

Beispielsweise gilt für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(x) \sim a^+ + a,$$

so dass

$$\begin{aligned} : \vec{E}^2(x) : &\sim : (a^+ + a)(a^+ + a) : \\ &= : a^+ a^+ + a^+ a + a a^+ + a a : \\ &= a^+ a^+ + 2a^+ a + a a \end{aligned}$$

und die korrekten Ausdrücke für Energie und Impuls werden

$$\begin{aligned} P^0 &= \int_{t = \text{const}} d^3x \frac{1}{2} : [\vec{E}^2(x) + \vec{B}^2(x)] : \\ \vec{P} &= \int_{t = \text{const}} d^3x : \vec{E}(x) \times \vec{B}(x) : \end{aligned}$$

Während die Erwartungswerte von elektrischer und magnetischer Feldstärke und von Energie und Impuls der Photonen Beobachtungsgrößen (Observable) sind, lassen sich jedoch Erwartungswerte des Viererpotenzials $\langle \text{phys. Zustand} | A^\mu | \text{phys. Zustand} \rangle$ nicht direkt beobachten.

Literatur

- [1] Itzykson, C., Zuber, J.-B.: Quantum Field Theory. McGraw Hill, New York (1980)
- [2] Peskin, M.E., Schroeder, D.V.: An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press (1995)
- [3] Srednicki, M.: Quantum Field Theory. Cambridge University Press (2007)
- [4] Banks, T.: Modern Quantum Field Theory. Cambridge University Press (2008)
- [5] Olive, K.A. et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics. Chin. Phys. C 38, 090001 (2014)
- [6] Murphy, M.T., Webb, J.K., Flambaum, V.V.: Further evidence for a variable fine-structure constant from Keck/HIRES QSO absorption spectra. Mon. Not. R. Astron. Soc. 345, 609 (2003)
- [7] Rosenband, T. et al.: Frequency Ratio of Al^+ and Hg^+ Single-Ion Optical Clocks; Metrology at the 17th Decimal Place. Science 319, 1808 (2008)
- [8] Bagdonaite, J., Ubachs, W., Murphy, M.T., Whitmore, J.B.: Constraint on a Varying Proton-Electron Mass Ratio 1.5 Billion Years after the Big Bang. Phys. Rev. Lett. 114, 071301 (2015)
- [9] Aoyama, T., Hayakawa, M., Kinoshita, T., Nio, M.: Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant. Phys. Rev. Lett. 109, 111807 (2012)
- [10] Hanneke, D., Fogwell Hoogerheide, S., Gabrielse, G.: Cavity control of a single-electron quantum cyclotron: Measuring the electron magnetic moment. Phys. Rev. A 83, 052122 (2011)

- [11] Schwinger, J.: On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. *Phys. Rev.* 73, 416L (1948)
- [12] Bennett, G.W. et al.: Measurement of the Negative Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.7 ppm. *Phys. Rev. Lett.* 92, 161802 (2004)
- [13] Bailey, J. et al.: Final report on the CERN muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation. *Nucl. Phys. B* 150, 1 (1979)
- [14] Blum, T. et al.: The Muon ($g-2$) Theory Value: Present and Future. [arXiv:1311.2198](https://arxiv.org/abs/1311.2198) (2013)
- [15] Stueckelberg, E.C.G.: La signification du temps propre en mécanique ondulatoire. *Helv. Phys. Acta* 14, 322 (1941)
- [16] Feynman, R.P.: A Relativistic Cut-Off for Classical Electrodynamics. *Phys. Rev.* 74, 939 (1948)
- [17] Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics I. A Covariant Formulation. *Phys. Rev.* 74, 1439 (1948)
- [18] Schwinger, J.: Quantum electrodynamics 2. Vacuum polarization and selfenergy. *Phys. Rev.* 75, 651 (1948)
- [19] Ito, D., Koba, Z., Tomonaga, S.-I.: Corrections due to the Reaction of 'Cohesive Force Field' to the Elastic Scattering of an Electron I. *Progr. Theoret. Phys. (Kyoto)* 3, 276 (1948)
- [20] Casimir, H.: On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch.* B51, 793 (1948)
- [21] Gupta, S.: Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics. *Proc. Phys. Soc.* 63A, 681 (1950)

-
- [22] Bleuler, K.: Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen. *Helv. Phys. Acta* 23, 567 (1950)
- [23] Nachtmann, O.: *Elementarteilchenphysik*. Vieweg, Braunschweig (1986)

10 Elemente der relativistischen Streutheorie

Es soll eine kurze Einführung in die Invarianten bei relativistischen Reaktionen gegeben werden, die an Teilchenbeschleunigern wie dem Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Genf wichtig sind [1]. Wir gehen zunächst aus von einer (idealisierten) Reaktion mit je zwei Teilnehmern im Ein- und Ausgangskanal

$$A + B \rightarrow C + D.$$

Im Schwerpunktsystem (CMS)

$$p_A + p_B \rightarrow p_C + p_D \quad \xrightarrow{\vec{p}_A} \xleftarrow{\vec{p}_B}$$

addieren sich die Dreierimpulse im Ein- und Ausgangskanal zu null:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D = 0.$$

Als Schwerpunktsenergie (oder invariante Masse) $E_{cm} \equiv \sqrt{s}$ bezeichnet man in der Teilchenphysik bei einem Stoßprozess die Gesamtenergie – die Summe der Ruheenergien und der kinetischen Energien – aller beteiligten Teilchen bezüglich ihres gemeinsamen Schwerpunkts-Koordinatensystems. Sie stellt nur einen Teil der vom Teilchenbeschleuniger aufgebrauchten Energie dar; der andere Teil steckt in der Mitbewegung des Schwerpunkts im Laborsystem. Nur die Schwerpunktsenergie kann in Anregungsenergie oder in erzeugte Teilchen umgewandelt werden.

Im Laborsystem (LS) ist

$$p_A^L + p_B^L \rightarrow p_C^L + p_D^L,$$

und bei einem festen Target (*fixed target*) ist $\vec{p}_B^L = 0$: $\xrightarrow{\vec{p}_A^L} \Big|_{\vec{p}_B^L=0}$.

Es gilt **Viererimpulserhaltung** ($\hat{=}$ Energie- und Impulserhaltung)

$$p_A + p_B = p_C + p_D$$

mit der zusätzlichen Bedingung relativistischer Energie-Impuls-Erhaltung ($\hbar \equiv c \equiv 1$):

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

Die Teilchen sind auf der Massenschale

$$\Rightarrow p_A^2 = m_A^2, p_B^2 = m_B^2, p_C^2 = m_C^2, p_D^2 = m_D^2.$$

Man führt drei Lorentz-invariante sog. **Mandelstam-Variable** ein:

Das Quadrat der Schwerpunktsenergie,

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 = E_{cm}^2 = (E_A + E_B)^2 = (E_C + E_D)^2,$$

sowie die folgenden Quadrate von Viererimpulstransfers

$$t = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2$$

$$u = (p_A - p_D)^2 = (p_C - p_B)^2.$$

Wegen der Bedingung $p_i^2 = m_i^2$ sind die drei Mandelstam-Variablen nicht unabhängig voneinander,

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_D^2.$$

Für die **invariante Größe** s gilt im **Schwerpunktsystem** (CMS)

$$s = (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - \underbrace{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2}_{= 0 \text{ im CMS}} = (E_A + E_B)^2.$$

Im **Laborsystem** (LS) mit festem Target

$$p_A^L = (E_A^L, \vec{p}_A^L), p_B^L = (E_B^L, \vec{p}_B^L) = (m_B, 0)$$

wird dieselbe Größe

$$s = (p_A^L + p_B^L)^2 = [E_A^L + m_B]^2 - (p_A^L)^2 = (E_A^L)^2 + 2m_B E_A^L + m_B^2 - (p_A^L)^2$$

und mit

$$(E_A^L)^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = m_A^2 \Rightarrow \boxed{s = m_A^2 + m_B^2 + 2m_B E_A^L}.$$

Mit s ist auch die cm-Energie $\sqrt{s} \equiv E_{cm}$ relativistisch invariant.

Die **kinetische Energie** des einfallenden Teilchens A ist **im Laborsystem**

$$\begin{aligned} k_A^L &= E_A^L - m_A \Rightarrow E_A^L = k_A^L + m_A \\ \Rightarrow \boxed{s &= (m_A + m_B)^2 + 2m_B k_A^L}, \end{aligned}$$

damit wird die **kinetische Energie im Schwerpunktsystem**

$$k_{cm} = \sqrt{s} - m_A - m_B = (m_A + m_B) \sqrt{1 + \frac{2m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2}} - m_A - m_B$$

und in **nichtrelativistischer Näherung** (nr)

$$\begin{aligned} k_A^L \ll m_A + m_B, \quad k_A \rightarrow k_A^{nr} \\ \Rightarrow k_{cm}^{nr} \simeq (m_A + m_B) \left[1 + \frac{m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2} \right] - m_A - m_B = (m_A + m_B) \frac{m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2} \\ \boxed{k_{cm}^{nr} = \frac{m_B}{m_A + m_B} k_A^L}. \end{aligned}$$

Dies ist ein vielbenutzter Ausdruck in der nichtrelativistischen Streutheorie.

Bei **hohen relativistischen Energien** ist dagegen

$$\begin{aligned} |\vec{p}_A^L| \gg m_A, m_B \\ \text{und wegen } (E_A^L)^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = m_A^2, \quad E_A^L = \sqrt{(\vec{p}_A^L)^2 + m_A^2} \\ \Rightarrow E_A^L \simeq |\vec{p}_A^L| \\ \boxed{s \simeq 2m_B E_A^L \simeq 2m_B |\vec{p}_A^L| \equiv E_{cm}^2}, \end{aligned}$$

d. h., die Schwerpunktsenergie wächst nur mit der Wurzel des Laborimpulses bei ultrarelativistischen Energien,

$$\sqrt{s} = E_{cm} \propto \sqrt{|\vec{p}_A^L|}.$$

Bei hohen Energien sind deshalb Collider im Vergleich zu Fixed-Target-Maschinen die wesentlich bessere Alternative.

Beispiel: $p + p$ am LHC, $|\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = 7 \text{ TeV}/c$
 $\xrightarrow{\vec{p}_A} \xleftarrow{\vec{p}_B}$

$$m_p \simeq 0,938 \text{ GeV}/c^2$$

$$E_A = E_B = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \stackrel{c=1}{=} \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{49 \cdot 10^6 + 0,88} \text{ GeV} \simeq 7 \text{ TeV},$$

$$s = (E_A + E_B)^2 \simeq 196 \cdot 10^6 \text{ GeV}^2 \Rightarrow \sqrt{s} \simeq 14 \cdot 10^3 \text{ GeV} = 14 \text{ TeV}.$$

Derselbe Wert von \sqrt{s} würde mit einem festen Target einen Laborimpuls erfordern von

$$|\vec{p}_A^L| \simeq \frac{s}{2m_p} = \frac{196 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,938} \text{ GeV}/c \simeq 104,48 \cdot 10^6 \text{ GeV}/c = 104,48 \cdot 10^3 \text{ TeV}/c,$$

d. h. das $\sim 15\,000$ -fache des Colliderimpulses, um dieselbe Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$ zu erreichen.

Literatur

- [1] Olive, K.A. et al. (Particle Data Group): Review of Particle Physics. Chin. Phys. C 38, 090001 (2014) ch. 46

11 Testaufgaben zur RQM-Vorlesung

Aufgabe 11.1: Kovarianz der Ableitungen

Zeigen Sie explizit:

Die Ableitung nach dem kontravarianten Vierervektor x^μ

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

verhält sich unter Lorentz-Transformation $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$

wie der kovariante Vierervektor $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Lösung

Transformation der Ableitung nach einem kontravarianten Vierervektor:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

\Rightarrow die Ableitung transformiert genauso wie die kovarianten x_μ , $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$, so dass $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \equiv \partial_\mu$, während der kontravariante Vierervektor transformiert wie $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$.

Aufgabe 11.2: Pauli-Matrizen

Zeigen Sie:

(1) Aus der Hermitezität ($\sigma_i = \sigma_i^\dagger (\equiv \sigma_i^{*T})$) und Unitarität ($\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{*T}$) der Pauli-Matrizen folgt $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{I}$.

(2) Die Determinanten und Spuren der Pauli-Matrizen sind

$$\det \sigma_i = -1, \quad \text{Sp } \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

(3) Es gilt $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \cdot \mathbb{I} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

(4) Die Pauli-Matrizen erfüllen die Algebra

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad i, j = 1, 2, 3$$

mit dem Levi-Civita-Tensor aus Kap. 1.

Lösung

(1) Es ist mit Hermitizität und Unitarität: $\sigma_i^2 = \sigma_i \sigma_i^+ = \sigma_i \sigma_i^{*T}$
 $= \sigma_i \sigma_i^{-1} = \mathbb{I}$

(2) – (4) folgen mit der Darstellung der Pauli-Matrizen aus Kap. 2 durch Einsetzen und Nachrechnen.

Aufgabe 11.3: Klein-Gordon-Gleichung (KGE)

Zeigen Sie explizit durch Einsetzen:

Die ebenen Wellen

$$\psi_{\pm}(\vec{x}, t) = e^{-i(E_{\pm}t - \vec{p}\vec{x})/\hbar}, \quad \text{mit } E_{\pm} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

sind Lösungen der freien KGE

$$\left[\partial_{\mu} \partial^{\mu} + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] |\psi\rangle = 0.$$

Lösung

Einsetzen und zweimalige Differenziation ergibt wieder die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4,$$

die Voraussetzung für die Gültigkeit der KGE ist.

Aufgabe 11.4: Lokale Eichinvarianz der KGE mit Feld

Zeigen Sie: Die KGE ist lokal eichinvariant unter der Transformation

$$A^{\mu} \rightarrow A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi(x)$$

($\chi(x)$ eine beliebige reelle skalare Funktion der Raum-Zeit-Koordinaten), wenn man die Wellenfunktion ψ transformiert gemäß

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\Lambda(x)}\psi(x)$$

und den Phasenfaktor wählt als

$$\Lambda(x) = \frac{e}{\hbar c}\chi(x).$$

Lösung: Die Rechnung steht in Kap. 3.2.

Aufgabe 11.5: Klein-Gordon-Gleichung mit Coulomb-Potenzial

Zeigen Sie: Die radiale KGE mit Potenzial $e\phi = -\frac{Ze^2}{r} \equiv \frac{\gamma}{r}$

$$\left[\frac{d^2}{d(\varrho/2)^2} + \frac{2\lambda}{\varrho/2} - 1 - \frac{l(l+1) - \gamma^2}{(\varrho/2)^2} \right] \varrho R(\varrho) = 0$$

ergibt mit

$$l(l+1) - \gamma^2 \equiv l'(l'+1), \quad 2\lambda \equiv \varrho_0 = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{Ze^2}{\hbar}$$

und dem Lösungsansatz

$$\varrho R(\varrho) = \underbrace{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{l'+1}}_{\text{asympt. Lösung}} \cdot \underbrace{e^{-\varrho/2}}_{\varrho \rightarrow \infty} w(\varrho/2)$$

asympt. Lösung

für $\varrho \rightarrow 0$

die folgende Radialgleichung für $w(\varrho)$:

$$\varrho \frac{d^2 w}{d\varrho^2} + 2(l'+1 - \varrho) \frac{dw}{d\varrho} + (\varrho_0 - 2(l'+1))w = 0.$$

Sie ist für $l' \rightarrow l$, $\varrho_0 = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{Ze^2}{\hbar}$ identisch mit der Radialgleichung im Schrödinger-Fall.

Lösung: durch Einsetzen und Umformen; s. Kap. 3.3.

Aufgabe 11.6: *Rekursionsrelation*

Der Potenzreihenansatz $w(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$

soll in die Klein-Gordon-Radialgleichung im Coulomb-Feld (s. Aufg. 11.5) eingesetzt werden. Bestimmen Sie die daraus folgende Rekursionsrelation zur Berechnung der Koeffizienten a_{k+1} aus a_k .

Lösung: $a_{k+1} = a_k \cdot [2(k + l' + 1) - \varrho_0] / [(k + 1)(k + 2l' + 2)]$;
die Rechnung steht in Kap. 3.3.

Aufgabe 11.7: *Algebraische Struktur der Dirac-Matrizen*

Zeigen Sie, dass durch zweimalige Anwendung des Dirac-Operators

$$H_D = \frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta mc^2 \quad \text{in} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H_D \psi$$

und Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0$$

die algebraischen Bedingungen folgen:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \mathbb{I}$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{I}.$$

Lösung: Die Rechnung steht in Kap. 4.2.

Aufgabe 11.8: *Standarddarstellung der Dirac-Matrizen*

Prüfen Sie in der Dirac-Darstellung

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \text{mit den Pauli-Matrizen } \sigma^k$$

explizit die Gültigkeit der algebraischen Relationen aus Aufg. 11.7.

Lösung: Einsetzen der 4×4 -Matrizen mit den 2×2 Pauli-Matrizen aus Aufg. 11.2 und Ausführen der Matrixmultiplikationen bestätigt, dass die Relationen in Aufg. 11.7 gelten.

Aufgabe 11.9: *Anti-Hermitizität der γ^k -Matrizen*

Zeigen Sie: $(\gamma^k)^+ = -\gamma^k$; $(\gamma^k)^2 = -\mathbb{I}$

mit $\gamma^k \equiv \beta\alpha^k$, und $\{\alpha^k, \beta\} = 0$.

Lösung

$$(\gamma^k)^+ = (\beta\alpha^k)^+ = \alpha^k\beta = -\beta\alpha^k = -\gamma^k$$

$$(\gamma^k)^2 = \beta\alpha^k \cdot \beta\alpha^k = -\beta\beta\alpha^k\alpha^k = -\mathbb{I}.$$

Aufgabe 11.10: *Nichtrelativistischer Grenzfall der DE*

Mit $\psi = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}$ wird die DE mit Feld $(\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}, \phi$ skalares Potenzial)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{\pi}\bar{\chi} \\ \vec{\sigma}\vec{\pi}\bar{\varphi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ -\bar{\chi} \end{pmatrix}.$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall zerlegen wir

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \text{ mit langsam variierendem } \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ genügt der Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{\pi}\chi \\ \vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

(φ ist die große, χ die kleine Komponente, die im nichtrelativistischen Grenzfall vernachlässigt wird: $\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{2mc}\varphi$).

Lösung: in Kap. 4.6.

Aufgabe 11.11: Lorentz-Transformation

Zeigen Sie: Aus der Forderung der Lorentz-Invarianz des d'Alembert-Operators

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$$

folgt

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho} \quad \text{oder in Matrixform}$$

$$\Lambda g \Lambda^T = g \quad (\text{dies definiert die Lorentz-Transformation})$$

$$(\text{es ist } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \equiv \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda)$$

Lösung: in Kap. 5.1.

Aufgabe 11.12: Paritätsinvarianz der DE

Zeigen Sie durch Einsetzen: Der Spinor im paritätstransformierten System

$$\psi'(\vec{x}', t') = S(P)\psi(\vec{x}, t) = \gamma^0 \psi(\vec{x}, t)$$

erfüllt die DE.

Lösung: Die Rechnung steht in Kap. 5.2.

Aufgabe 11.13: Dirac-adjungierte Spinoren

Beweisen Sie mit dem Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ die Matrixrelation aus Kap. 5.3:

$$(\bar{\psi}_1 M \psi_2)^\dagger = \bar{\psi}_2 \bar{M} \psi_1$$

(mit $\bar{M} \equiv \gamma^0 M^\dagger \gamma^0$).

Lösung

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 M \psi_2)^\dagger &= \psi_2^\dagger M^\dagger \bar{\psi}_1^\dagger = \psi_2^\dagger \gamma^0 \gamma^0 M^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \bar{\psi}_1^\dagger \\ &= \bar{\psi}_2 \bar{M} \gamma^0 (\psi_1^\dagger \gamma^0)^\dagger = \bar{\psi}_2 \bar{M} (\gamma^0)^2 \psi_1 = \bar{\psi}_2 \bar{M} \psi_1. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.14: Ladungskonjugationsinvarianz der DE

Zeigen Sie:

Der ladungskonjugierte Spinor

$$\begin{aligned} \psi^C(\vec{x}, t) &\equiv S(C) \bar{\psi}^T(\vec{x}, t) \equiv i \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^T(\vec{x}, t) \\ \text{mit } \bar{\gamma}^T &\equiv (\psi^\dagger \gamma^0)^T = (\gamma^0)^T (\psi^\dagger)^T \end{aligned}$$

erfüllt die DE.

Lösung: Benutze die Relationen in Kap. 5.3.

Aufgabe 11.15: Zeitumkehrinvarianz der DE

Zeigen Sie, dass die freie Dirac-Gleichung

$$(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

unter Zeitumkehrtransformation mit $S = \gamma_5 \gamma^0$, $\gamma_5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ invariant ist. (*Hinweis:* Benutze die Standarddarstellung der γ_μ ; γ_5 antikommutiert mit γ^μ : $\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0 \forall \mu = 0, 1, 2, 3$)

Lösung: Schreibe die DE als

$$[-i\gamma^0\partial_t - i\gamma^j\partial_j + m]\psi = 0$$

Zeitumkehr $t \rightarrow -t$, $\vec{x} \rightarrow \vec{x}$, $\psi \rightarrow S\psi$:

$$[-i(-\gamma^0)\partial_t - i\gamma^j\partial_j + m]S\psi = 0$$

Diese Gleichung entspricht der DE für $\gamma^0 \rightarrow -\gamma^0$ und $\gamma^j \rightarrow \gamma^j$, denn mit $S = \gamma_5\gamma^0$ gilt

$$S^{-1}\gamma^0S = -\gamma^0$$

$$S^{-1}\gamma^jS = \gamma^j$$

(Beweis s. Kap. 5.4).

Aufgabe 11.16: Berechnen Sie aus dem exakten Ausdruck für die Dirac-Energieeigenwerte im Coulomb-Feld

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - 1/2 + [(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

durch Entwicklung nach $(Z\alpha)^2$ die genäherten Energieeigenwerte, und vergleichen Sie mit den Schrödinger-Eigenwerten.

Lösung: s. Kap. 6.

Aufgabe 11.17: *Weyl-Spinoren*

Der zweikomponentige Spinor $u^+(p)$ erfüllt die Gleichung

$$p_0 u^+(p) = \vec{\sigma} \vec{p} u^+(p)$$

Zeigen Sie: Es gibt nichtverschwindende Lösungen für u^+ nur für

$$p_0 = \pm |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Helizitätsoperator $\vec{\sigma}\vec{p}/|\vec{p}|$ auf beide Seiten der Gleichung an, und benutzen Sie $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B})$.

Die Lösungswege sollten für guten Lernerfolg schrittweise erarbeitet werden, ohne im Text zurückzublättern.

12 Bibliographie

Bjorken, J.D., Drell, S.D.: Relativistic Quantum Mechanics. McGraw Hill (2008)

Bransden, B.H., Joachain, C.J.: Introduction to Quantum Mechanics. Pearson/ Prentice Hall (2000)

Greiner, W.: Relativistic Quantum Mechanics, Springer-Verlag (2000)

Itzykson, C., Zuber, J.-B.: Quantum Field Theory. McGraw Hill, New York (1980)

Messiah, A.: Quantenmechanik, Band 2. de Gruyter (1990)

Nachtmann, O.: Elementarteilchenphysik. Vieweg, Braunschweig (1986)

Pilkhuhn, H.M.: Relativistic Quantum Mechanics. Springer-Verlag (2005)

Schwabl, F.: Quantenmechanik für Fortgeschrittene. Springer-Verlag (2008)

Wachter, A.: Relativistische Quantenmechanik. Springer-Verlag (2005)