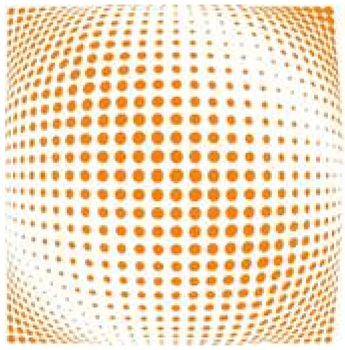
"Indem das Eins als Eins fixiert ist, so ist das Zusammenkommen desselben mit Andern allerdings als etwas ganz Äußerliches anzusehen. -Das Leere, welches als das andere Prinzip zu den Atomen angenommen wird, ist die Repulsion selbst, vorgestellt als das seiende Nichts zwischen den Atomen. -Die neuere Atomistik -und die Physik behält noch immer dies Prinzip bei -hat insofern die Atome aufgegeben, als sie sich an kleine Teilchen, Molecules hält; sie hat sich damit dem sinnlichen Vorstellen nähergebracht, aber die denkende Bestimmung verlassen. " G.W.F. Hegel [1].



Wie elementar ist das Elementare? (P. Kleinert)

1 Das Ding und die Leere

Das Paradigma der ionischen Naturphilosophie wurde von Thales von Milet (624-546) auf den Punkt gebracht: der Ursprung aller Dinge ist das Wasser. Paradigmatisch ist diese Äußerung, weil sie einerseits die Frage nach einem allumfassenden Ursprung überhaupt zulässt und für beantwortbar hält, so dass die Welt aus einem einheitlichen Prinzip heraus verständlich ist. Um dem Formenreichtum der Welt besser zu entsprechen, zählte Empedokles (494-434) die vier "Stammwurzeln" aller Dinge auf nämlich Erde, Wasser, Luft und Feuer. Nur ein kleiner Schritt führte schließlich weiter zum atomistischen Materialismus, der von Leukipp (5. Jahrhundert v. Chr.) und Demokrit (460-371) begründet wurde. Nach dieser Lehre gibt es eine Polarität von Sein und Nichtsein. Das reine Sein zieht sich gewissermaßen auf einen Punkt zusammen und wird dort fassbar als das Atom. Was in den Weiten des Universums existiert das sind winzige Atome und der gähnend leere Raum zwischen ihnen. Die unterschiedliche Lagerung der Atome bestimmt die Qualität der Stoffe und begründet die Vielfalt. Die Atome selbst haben keinerlei Eigenschaften. Sie riechen nicht, haben keine Farbe und sind weder warm noch kalt. Demokrit wird der Satz zugeschrieben: "So wie etwa die Tragödie und die Komödie mit den gleichen Buchstaben niedergeschrieben werden können, so kann auch sehr verschiedenartiges Geschehen in der Welt durch die gleichen Atome verwirklicht werden, sofern sie nur verschiedene Stellungen einnehmen und verschiedene Bewegungen ausführen". Die Atomlehre erfuhr eine grandiosen Rechtfertigung durch die Neuzeit. Das ist ein überwältigender Triumph der ionischen Naturphilosophie, nach der die Welt letzten Endes aus einem einheitlichen Stoff besteht und nach einem einheitlichen Prinzip aufgebaut ist. Der Siegeszug des Atomismus in den modernen Naturwissenschaften ist unbestreitbar und überwältigend. Es gilt als unumstösslich nachgewiesen, dass alle Materie, ganz gleich ob es sich um lebende oder tote Körper handelt, aus drei Sorten von Elementarteilchen besteht, nämlich aus Elektronen, Protonen und Neutronen. Die Vielgestalt der Wirklichkeit resultiert aus den unterschiedlichen Kombinationen der Bausteine im leeren Raum.

Seltsam genug, dass Nörgler auf den Plan traten und Kritik anmeldeten. Denn der Atomismus bildet nicht nur das Fundament der gesamten Chemie, Pharmazie und Materialwissenschaft, sondern er beinhaltet auch das bestimmende Basiswissen der gesamten Technik. Von diesem grandiosen Triumph konnte sich Hegel kein Bild machen. Ist daher seine radikale und prinzipielle Kritik überholt? Nein! Im Gegenteil: angesichts der unerwarteten Ergebnisse, die von der modernen Quanten-Feldtheorie (QFT) erbracht wurden, möchte man geradewegs von Prophetie sprechen.

Anhand einfacher Rechenaufgaben lassen sich einige Grundauffassungen der QFT illustrieren.

Zunächst betrachten wir das **Kleinsche Paradoxon**. Die Klein-Gordon Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\Phi(\boldsymbol{x},t) = 0,$$

entsteht aus dem speziell relativistischen Ausdruck für die Energie $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ durch Anwendung der Quantisierungsvorschrift $E \to i\partial/\partial t$, $\boldsymbol{p} \to -i\nabla$. Lösungen dieser Gleichung sind ebene Wellen

$$\Phi_{\pm p}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}e^{\mp i\omega_p t \pm i\boldsymbol{px}}, \quad \omega_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2},$$

wobei die Welle Φ_{-p} negative Energie und negative Norm hat. Als Übungsaufgabe wird die Reflexion einer fortschreitenden Welle an einer Potentialkante berechnet, wie es in Abb. 1 schematisch dargestellt ist. Bei Beachtung des Ausdrucks für die Energie $E = \sqrt{p_{II}^2 + m^2} + V_0$, werden für die

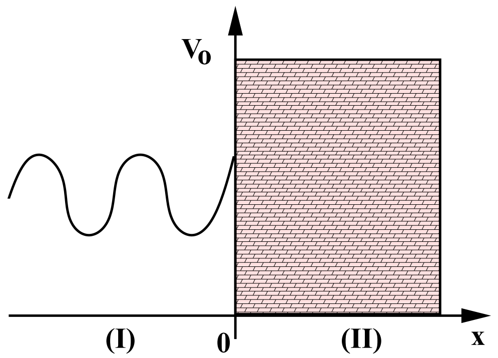


Abbildung 1: Schema zum Kleinschen Paradoxon.

Lösungen in den Bereichen I und II folgende Lösungsansätze gemacht

$$\Phi_I(\boldsymbol{x},t) = e^{-iEt + ip_I x} + A_R e^{-iEt - ip_I x}, \quad p_I = \pm\sqrt{E^2 - m^2},$$

$$\Phi_{II}(\boldsymbol{x},t) = A_T e^{-iEt + ip_{II} x}, \quad p_{II} = \pm\sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}.$$

Die Stetigkeitsbedingungen an der Kante $\Phi_I(0,t) = \Phi_{II}(0,t)$ und $\partial_x\Phi_I(0,t) = \partial_x\Phi_{II}(0,t)$ führen auf das Ergebnis

$$A_R = \frac{p_I - p_{II}}{p_I + p_{II}}, \quad A_T = \frac{2p_I}{p_I + p_{II}}.$$

Ist die Potentialbarriere hinreichend hoch ($V_0 > E$), dann ist $E - V_0$ negativ, so dass die Gruppengeschwindigkeit der transmittierten Welle $p_{II}/(E - V_0)$ die entgegengesetzte Richtung zum Impuls p_{II} hat. Wäre demnach p_{II} positiv, so liefe die transmittierte Welle aus dem Unendlichen kommend von rechts auf die Potentialbarriere zu. Damit das nicht geschieht, ist $p_{II} < 0$ zu fordern. Die Stromdichte

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{2mi}(\Phi^*\nabla\Phi - \Phi\nabla\Phi^*)$$

hat drei Bestandteile, nämlich den der einfallenden Welle $j_I = p_I/m$, sowie die Anteile der reflektierten und transmittierten Welle

$$j_{\leftarrow} = \frac{p_I}{m}\left(1 - \left(\frac{p_I - p_{II}}{p_I + p_{II}}\right)^2\right), \quad j_{\rightarrow} = \frac{p_{II}}{m}\left(\frac{2p_I}{p_I + p_{II}}\right)^2, \quad \text{mit} \quad p_{II} < 0.$$

Für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten ergibt sich daher

$$R = \frac{j_I - j_{\leftarrow}}{j_I} = \left(\frac{p_I + |p_{II}|}{p_I - |p_{II}|}\right)^2 > 1, \quad T = \frac{j_{\rightarrow}}{j_I} = -\frac{4p_I|p_{II}|}{(p_I - |p_{II}|)^2} < 0, \quad T + R = 1.$$

Das paradoxe Ergebnis liegt auf der Hand. Der Reflektionskoeffizient ist größer als Eins und der Transmissionskoeffizient wird negativ. Wie kann es geschehen, dass an der Potentialbarriere der zurückgeworfene Wellenstrom den einfallenden übertrifft? Die Auflösung dieses Paradoxons besteht darin, dass eine Lorentz-invariante QM eine Vielteilcheninterpretation erzwingt. Analog lässt sich der Durchgang eines Teilchens durch eine Potentialbarriere betrachten. Das Klein'sche Paradoxon äußert ich in diesem Fall dadurch, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit mit ansteigender Barrierenhöhe V_0 nicht, wie erwartet, exponentiell abklingt, sondern stetig gegen Eins geht. Ist die Potentialbarriere hinreichend hoch, wird sie vollkommen durchlässig. Dieses seltsame Verhalten ist Folge des engen Zusammenhangs der Zustände mit positiver und negativer Energie, die Komponenten eines gemeinsamen Spinors sind. Daher übertragen sich die Randbedingungen für Elektronen auf die der Positronen, was die unerwartet hohe Transmissionswahrscheinlichkeit erklärt. Es ist nicht verwunderlich, dass dieser Effekt der relativistischen QFT bisher nicht beobachtet wurde. Die erforderlichen Felder liegen in der Größenordnung von 10^{16} V/cm. Allerdings wird gegenwärtig ein experimenteller Nachweis des Klein'schen Paradoxons ins Gespräch gebracht, der in der Festkörperphysik erfolgen könnte [2]. Einatomige Graphitschichten sind charakterisiert durch zwei äquivalente Untergitter, deren Kopplung auf zwei Cosinus-ähnliche Energiebänder führt, die am Rande der Brillouin Zone eine konische Form haben. Das bedeutet, dass für die Anregungen ein lineares Dispersionsgesetz gilt. Die zusammenfassende Beschreibung beider Untergitter einschließlich der linearen Dispersion gelingt durch einen masselosen Dirac-ähnlichen Hamiltonian. Da die Elektronen und Löcher (Positronen) nicht durch eine gewaltige Energielücke getrennt sind, sondern sogar masselose Dirac-Fermionen sein können, sollte das Klein'sche Paradoxon schon bei gut beherrschbaren Feldstärken von 10^5 V/cm nachweisbar sein. Während für Monoschichten der Transmissionskoeffizient bei normaler Inzidenz gegebenenfalls verschwinden sollte, wird für Doppelschichten perfekte Reflexion vorhergesagt. Der experimentelle Nachweis des paradox erscheinenden Klein'schen Tunnelns wurde offenbar kürzlich für eine monoatomare Graphitschicht erbracht [3].

Dieses einfache Gedankenexperiment besagt, dass durch starke elektrische Felder Teilchen-Antiteilchenpaare aus dem Vakuum hervorgebracht werden können. Wie ist das zu verstehen? In der nicht-relativistischen QM werden die Observablen durch selbstadjungierte Operatoren repräsentiert. Im Heisenbergbild ist die Messung lokal in der Zeit aber global im Ort, da es zwar einen Orts- aber keinen Zeitoperator gibt. Für eine relativistische QM muss sich die Situation grundlegend ändern, da die prinzipielle physikalische Unterscheidung zwischen Zeit- und Ortsvariablen aufgegeben werden muss. Wie die Zeit, so ist auch der Ort in der QFT keine Observable, sondern ein Parameter. Die Vertauschungsrelationen müssen garantieren, dass die Ergebnisse in kausal nicht verbundenen Raum- Zeitbereichen nicht miteinander interferieren können, wodurch die Sonderrolle des Ortes gegenüber der Zeit zurückgenommen wird. Die Lorentzinvarianz erzwingt daher den Gebrauch von Quantenfeldern. Welche Auswirkungen hat diese Forderung für das Naturverständnis? Der klassische Feldbegriff ist geläufig. Danach kann jedem Raum-Zeitpunkt der klassischen Welt ein Eigenschaftsbündel zugeordnet werden, beispielsweise Vektoren des elektromagnetischen Feldes. Was ändert sich an dieser Vorstellung, wenn die QFT zugrundegelegt wird? Im Heisenbergbild erfolgt die zeitliche Entwicklung nur auf der Ebene der Operatoren. Sind daher die Eigenschaftsbündel der klassischen Feldtheorie durch Operatorbündel der QFT zu ersetzen [4]? Die Besonderheit besteht darin, dass ein Heisenbergoperator alle seine

Eigenwerte zu jedem Zeitpunkt mit sich trägt. Welcher Wert tritt gegebenenfalls in Erscheinung? Das wird durch den zeitunabhängigen Eigenzustand bestimmt. Er muss hinzugenommen werden, um ein abschließendes Urteil fällen zu können. Die zeitliche Entwicklung des Heisenbergoperators selbst ist eher mit der Ausbreitung eines kollektiven Musters zu vergleichen, bei dem alle möglichen Messwerte beteiligt sind. Hat das noch etwas mit der klassischen Auffassung von einer zeitlichen Entwicklung und räumlichen Verschiebung von Eigenschaften zu tun? Allenfalls die Erwartungswerte der Observablen haben einen Bezug zum klassischen Eigenschaftsbündel. Aber das Anheften eines kompletten Möglichkeitsspektrums an Raum-Zeitpunkte hat zunächst keinerlei Beziehung zur klassischen Buchführung. Allerdings kommt die Vorstellung vom Teilchen als des typischen Buchhalters auf seltsame Weise durch die Hintertür zurück, nämlich in Gestalt der Quantisierung des Möglichkeitsfeldes selbst. Aber das bedeutet keine Renaissance der antiken Idee von einem Ding, das sich in der absoluten Leere breit macht. Der Grund überrascht: auch die Leere verliert ihr fades Gesicht. An einem einfachen Beispiel soll dieser Sachverhalt verdeutlicht werden.

Dazu betrachten wir den **Schwingermechanismus** [5], der besagt, dass ein elektrisches Feld das Dirac-Vakuum ionisieren kann. Lokal werde ein starkes, konstantes elektrisches Feld $\mathcal{E}$ im leeren Raum zur Verfügung gestellt, das im Intervall $0 < x < L$ durch das Potential $V(x) = e\mathcal{E}x$ beschrieben wird. Dadurch kommt es zu einer Verschiebung der Bandkanten des Dirac Vakuums, wie es in Abb. 2 schematisch dargestellt ist. Bei hinreichend hoher Feldstärke wird ein Teilchenaustausch durch Tunneln möglich. Der WKB Transmissionskoeffizient berechnet sich aus

$$T_{WKB} \sim \exp\left\{ -2 \int_{x_-}^{x_+} dx \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}_\perp^2 - (E_0 - e\mathcal{E}x)^2} \right\},$$

wobei die Umkehrpunkte durch $x_\pm = (E_0 \pm \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}_\perp^2})/e\mathcal{E}$ gegeben sind. Weiterhin ist $\boldsymbol{p}_\perp = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$ der Betrag des Impulses senkrecht zum Feld. Die Berechnung des Integrals ergibt für die Tunnelwahrscheinlichkeit W, die der Paarerzeugung pro Volumen und Zeiteinheit zugeordnet ist, eine exponentielle Feldabhängigkeit $W \sim \exp(-\pi m/e\mathcal{E})$. Bei einer Feldstärke von der

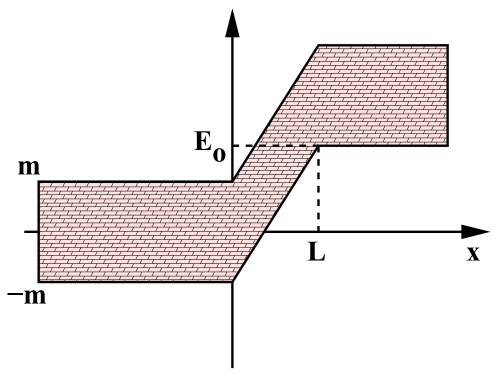


Abbildung 2: Schema zum Schwingermechanismus.

Größenordnung $\mathcal{E} \sim m^2c^3/\hbar e \approx 1.3\,10^{16}$ V/cm werden aus dem absoluten "Nichts" der atomistischen Welt Elektron-Positron Paare herausgeschlagen. Was besagt dieser Effekt? Der Vakuumzustand der QFT ist invariant gegenüber Transformationen der Poincaré Gruppe und kovariant bezüglich Lorentztransformationen. Daher sind sich Beobachter in beliebigen Inertialsystemen einig über die Zahl der Teilchen in einem Quantenzustand und über den Charakter des gemeinsamen Vakuums. Wird diese Invarianz jedoch gebrochen, wie im Fall des Schwingereffekts, dann lässt sich kein Zustand finden, der von allen Beobachtern gleichermaßen als das globale Vakuum akzeptiert werden kann. Was für den einen Beobachter der Vakuumzustand ist, also völlige Leere assoziiert, findet ein anderer bevölkert mit Teilchen. Schon ein schwerer Atomkern mit der Kernladungszahl 173 bringt das neutrale Vakuum in Verlegenheit. Der $1s_{1/2}$ Zustand dieses Atoms ist bis zum Dirac-See abgesenkt. Wäre dieser Eigenzustand unbesetzt, würde er augenblicklich durch ein Elektron des Dirac Sees aufgefüllt und zurück bliebe ein frei bewegliches Loch (Positron). Es käme demnach zu einer spontanen Elektron-Positron Paarerzeugung. Da das freie Positron abwandert, bildet sich spontan ein geladenes Vakuum. Ein Vakuum ohne Ladungen ist unter diesen Umständen nicht mehr möglich. Dieser Übergang vom neutralen zum geladenen Vakuum ist ein Phasenübergang, den das Vakuum erleidet. Die gesamte Welt geht allein durch die Anwesenheit eines einzigen schweren Atoms in einen neuen Zustand über, der durch ein geladenes Vakuum charakterisiert ist. Die Selbstabschirmung des Vakuums sorgt allerdings dafür, dass die Bildung unendlich vieler Elektron-Positron Paare vermieden wird.

Es entsteht der merkwürdige Verdacht, dass die Übertragung der klassischen Eigenschaftsbündel auf Quantenfelder nicht weniger problematisch und zweifelhaft ist, wie deren Inanspruchnahme zur Bestimmung des Vakuums. Kann so gesehen auch von der Dinghaftigkeit der Leere gesprochen werden? Diese absurde Frage beinhaltet ein Problem, das den ontologischen Status virtueller Zustände betrifft. Ist das spontane Hervortreten von virtuellen Elektron-Positron Paaren aus dem Vakuum ein realer Prozess? Haben die Bestandteile der Störungsreihe, die anschaulich in Verbindung mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren interpretiert werden können, einen anderen Charakter als den eines bloßen Rechenschemas? Angesichts der nachweisbaren Existenz der Quasiteilchen spitzt sich die Frage zu. Denken wir an das Cooper Paar, das Träger der Supraleitfähigkeit ist. Störungstheoretisch setzt es sich unwiderruflich aus unendlich vielen Beiträgen zusammen. Wären alle Bestandteile virtuell und unwirklich, wie könnte sich aus ihnen ein robustes "Objekt" zusammensetzen? Pragmatisch ließen sich virtuelle Zustände dadurch dingfest machen, dass die Abwesenheit ihrer Besetzungszahlen im Formalismus nachgewiesen wird. Man spricht von Zwischenzuständen beispielsweise bei der Raman Streuung. Selbstverständlich ist diese Unterteilung Situations gebunden und eine klare Abgrenzung ist nicht zu erwarten.

Die enge Verwandtschaft zwischen Quantenfeldern und dem Vakuum bzw. zwischen den Dingen und der Leere, illustriert die Fock-Raum Darstellung freier Quantenfelder. Danach ist ein freies, skalares Quantenfeld darstellbar durch eine unendliche Ansammlung von harmonischen Oszillatoren, die sich über den gesamten Raum verteilen. Die anschauliche Vorstellung sieht den gesamten Raum angefüllt mit Kügelchen, die über Federn miteinander verbunden sind. Nach einer Anregung breiten sich im Netz der verknoteten Partikel wellenförmig Schwingungen aus, die klassisch durch eine Wellengleichung beschrieben werden. Durch die zweite Quantisierung werden diese Schwingungen quantisiert, d.h. in diskrete Portionen zerlegt, so dass im Zusammenwirken der Quanten das Schwingungsmuster entsteht. Die Nullpunktsenergien aller möglichen Oszillatoren an den verschiedensten Raumpunkten werden aufsummiert und ergeben einen unendlichen Beitrag zur Energie des Vakuums. Scheinbar wird dadurch eine unendliche Größe entsorgt, die physikalisch völlig belanglos zu sein scheint. Diese Interpretation ist nur zum Teil korrekt. Tatsächlich hat die Energie des Vakuums beobachtbare Konsequenzen. Wir erwähnen den **Casimir Effekt**, der seinen Ursprung in der zweiten Quantisierung hat. Die Energie des Vakuums äußert sich beispielsweise, wenn zwei parallele Metallplatten dem quantisierten elektromagnetischen Feld des Vakuums Randbedingungen auferlegen. Dadurch wird die Ausbildung von stehenden Wellen des Quantenfeldes erzwungen. Für zwei Platten, die parallel zur x-y Ebene sind, hat diese Welle die Form

$$\psi_n(\boldsymbol{x},t) = e^{-i\omega_n t + i\boldsymbol{k}_\parallel \boldsymbol{x}_\parallel} \sin(k_n z), \quad k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \omega_n = \sqrt{\boldsymbol{k}_\parallel^2 + (\pi n/a)^2}.$$

Pro Flächeneinheit A gilt für die Gesamtenergie zwischen den Platten

$$\frac{\langle E(a)\rangle}{A} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int \frac{d^2\boldsymbol{k}_\parallel}{(2\pi)^2}\frac{\omega_n}{2} = \frac{1}{4\pi a^3}\sum_{n=1}^{\infty} F(n), \quad F(n) = \int_{(\pi n)^2}^{\infty} dz\sqrt{z}e^{-t\sqrt{z}/a},$$

wobei der Faktor 2 die beiden Polarisationen der Welle berücksichtigt. Durch den Exponentialfaktor $\exp(-\omega_n t)$ wurde die n Summe regularisiert. Am Schluss der Rechnung ist der Grenzübergang $t \to 0$ vorzunehmen. Durch Anwendung der Euler-MacLaurin'schen Formel lässt sich die n Summe auswerten und man erhält für die effektive Energie der Casimir Anordnung

$$\frac{\langle E(a)\rangle_{\text{eff}}}{A} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{2}\langle E(0)\rangle + \langle E(a)\rangle - \langle E(\infty)\rangle\right] = -\frac{\pi^2}{720a^3}.$$

Die Casimir Kraft pro Flächeneinheit ist gegeben durch

$$\frac{F_c}{A} = -\frac{d}{da}\frac{\langle E(a)\rangle_{\text{eff}}}{A} = -\frac{\hbar c\pi^2}{240a^4}.$$

Wenn die Platten dichter zusammenrücken, vermindert sich die Energie und die anziehende Kraft wächst mit der vierten Potenz des Abstands an. Dieser Effekt wurde 1958 von M.J. Sparnaay nachgewiesen [6].

Was bereits im Zusammenhang mit dem Schwingereffekt zur Sprache kam, soll hier noch einmal aufgegriffen werden. Es handelt sich um die Tatsache, dass die Existenz eines einzigen Objekts das gesamte Universum umkrempeln kann. Angenommen es gäbe einen einzelnen **magnetischen Monopol**, der Quelle eines Magnetfeldes $\boldsymbol{B}$ ist, so dass $\text{div}\boldsymbol{B} = g\delta(\boldsymbol{r})$ gilt, bzw. in Kugelkoordinaten $B_r = g/r^2$, $B_\varphi = B_\Theta = 0$. Für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ (mit $\boldsymbol{B} = \text{rot}\boldsymbol{A}$) findet man die Lösung

$$A_\varphi = \frac{g}{r}\tan\frac{\Theta}{2}, \quad A_r = A_\Theta = 0,$$

die entlang der Geraden von $r = 0$ bis $r \to \infty$ bei $\Theta = \pi$ singulär ist. Dieser Dirac String lässt sich durch Umeichung neu ausrichten aber nicht beseitigen. Physikalisch wird er als eine unendlich dünne Spule aufgefasst, in deren Innern ein magnetische Fluss vom Unendlichen kommend in den magnetischen Monopol einläuft. Aus Konsistenzgründen darf der Dirac String nicht beobachtbar sein, so dass die Aharonov-Bohm Phase der Wellenfunktion ein ganzzahliges Vielfache von 2π sein muss: $eg = 2\pi n$ (wegen $\exp(ige) = 1$). Daher bedingt die Anwesenheit eines einzigen magnetischen Monopols irgendwo im Weltraum aus Konsistenzgründen die Quantisierung der elektrischen Ladung in Einheiten von $2\pi/g$, wobei g die magnetische Ladung des Monopols ist.

2 Nicht das Ding sondern die Symmetrie

Das **Noether Theorem** besagt, dass es zu jeder kontinuierlichen Symmetrie einer Feldtheorie einen Viererstrom gibt, der ein Erhaltungssatz ausdrückt. Der Nachweis des Theorems ist leicht zu erbringen. Dazu wird eine infinitesimale Variation der Lagrangedichte betrachtet, die mit der

Symmetrie des Systems verträglich ist. Wegen der zu fordernden Invarianz der Wirkung hat die Variation die Form $\delta\mathfrak{L} = \partial_\mu Z^\mu$, so dass gilt

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\partial_\mu\delta\Phi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\delta\Phi\right) + \left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi} - \partial\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\right)\right]\delta\Phi = \partial_\mu Z^\mu.$$

Bei Beachtung der Feldgleichungen folgt der Erhaltungssatz für die Viererstromdichte

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \text{mit} \quad J^\mu = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\delta\Phi - Z^\mu.$$

Infolgedessen ist die Ladung $Q = \int d^3\boldsymbol{x} J^0(\boldsymbol{x},t)$ eine Erhaltungsgröße

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3\boldsymbol{x}\,\partial_0 J^0(\boldsymbol{x},t) = -\int d^3\boldsymbol{x}\,\partial_i J^i(\boldsymbol{x},t) = 0.$$

Darüber hinaus fungiert Q als Generator der Symmetrietransformation, wie es das folgende einfache Beispiel illustriert. Bei Invarianz gegenüber der Translation $x^{\mu\prime} = x^\mu + a^\mu$ (mit $\Phi'(x') = \Phi(x)$) ändert sich das skalare Feld gemäß $\delta\Phi = -a^\mu\partial_\mu\Phi$. Da auch die Lagrangedichte ein Lorentzskalar ist, gilt für sie ebenfalls $\delta\mathfrak{L} = -a^\mu\partial_\mu\mathfrak{L}$, so dass $Z^\mu = -a^\mu\mathfrak{L}$ folgt. Ein Erhaltungssatz ergibt sich für den Viererstrom

$$J^\mu = -\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}a^\nu\partial_\nu\Phi + a^\mu\mathfrak{L} \equiv -a_\nu T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\Phi}\partial^\nu\Phi - \eta^{\mu\nu}\mathfrak{L},$$

der mit Hilfe des Energie-Impulstensors $T^{\mu\nu}$ durch die Gleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ausgedrückt wird. Der zugehörige Viererimpuls $P^\nu = \int d^3\boldsymbol{x}\,T^{0\nu}$ ist der Generator der Raum-Zeittranslationen. Das Noethersche Theorem ist ein fundamentales physikalisches Gesetz, das die invarianten Größen bzw. die wesentlichen Eigenschaften eines Modells mit dessen Symmetrien in Verbindung bringt. Diese Erkenntnis ist faktisch deckungsgleich mit der entsprechenden Vorstellung des antiken Atomismus, wonach die Vielfalt der Erscheinungen und Objekte aus der Mannigfaltigkeit der atomaren Anordnungen folgt. Was dem Atomismus allerdings völlig absurd erscheinen muss ist die Vorstellung, dass die Bedeutung der Symmetrie weit darüber hinaus reicht indem sie selbst für das Zustandekommen der Elementarteilchen verantwortlich ist. Die klare Trennung zwischen Objekt und Leere käme dadurch ins Wanken. Und tatsächlich besagt das **Goldstone Theorem**, dass es zu jeder spontan gebrochenen kontinuierlichen globalen Symmetrie ein masseloses pseudoskalares Teilchen gibt. Dieser Sachverhalt lässt sich gut an einem einfachen Beispiel illustrieren. Betrachten wir die Lagrangedichte für ein komplexes skalares Feld

$$\mathfrak{L} = \partial\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{3!}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2), \tag{1}$$

die invariant gegenüber einer globalen $U(1)$ Phasentransformation ist, d.h. der Übergang $\Phi \to \Phi' = e^{i\alpha}\Phi$ lässt die Lagrangedichte ungeändert $\mathfrak{L}(\Phi', \partial_\mu\Phi') = \mathfrak{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)$. Das Potential hat ein Minimum bei $\Phi^\dagger\Phi = 6m^2/\lambda \equiv v^2$, das einen Vakuumzustand festlegt, der spontan die $U(1)$ Symmetrie bricht. Für dieses Modell hat der Grundzustand eine geringere Symmetrie als die Bewegungsgleichungen, wie das in Abb. 3 schematisch dargestellt ist. Das ist die typische Situation, auf die sich das Goldstone Theorem bezieht. Fluktuationen um den Grundzustand lassen sich durch reelle skalare Felder $\chi_1 = \Phi_1 - v$, $\chi_2 = \Phi_2$ beschreiben. Die Lagrangedichte wird dadurch auf folgende Form gebracht

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\chi_1)^2 + (\partial_\mu\chi_2)^2\right] - \frac{\lambda v^2}{3!}\chi_1^2 - \frac{\lambda}{4!}\left(\chi_1^4 + 2\chi_1^2\chi_2^2 + \chi_2^4\right) - \frac{\lambda v}{3!}\chi_1(\chi_1^2 + \chi_2^2).$$

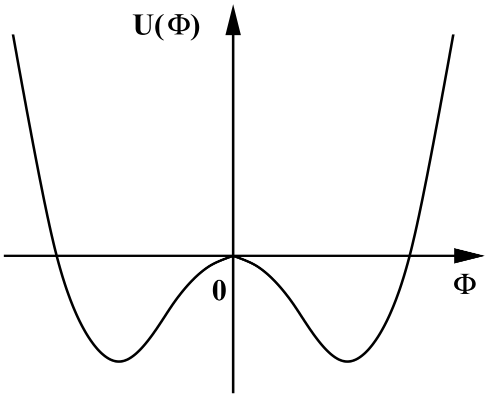


Abbildung 3: Das symmetrie-brechende Potential als Funktion der Variable Φ.

Während das Feld χ_1 weiterhin ein massives Teilchen repräsentiert, gibt es das masselose Goldstone Boson χ_2, das dem spontanen Symmetriebruch zugeordnet ist. Der neu entstandene Lagrangian ist gegenüber der ursprünglichen Phasentransformation nicht mehr invariant. Wegen $\Phi^\dagger\Phi = (\chi_1 + v - i\chi_2)(\chi_1 + v + i\chi_2)/2$ ist er dennoch invariant gegenüber einer neuen $U(1)$ Transformation nämlich $\chi_1 + v + i\chi_2 \to (\chi_1 + v + i\chi_2)' = e^{i\alpha}(\chi_1 + v + i\chi_2)$. Deshalb sagt man auch, die globale $U(1)$ Phasensymmetrie sei lediglich verborgen.

Im Zusammenhang mit der Eichsymmetrie entsteht bei einem spontanen Symmetriebruch kein Goldstone Boson, sondern ein massives Vektorfeld. Durch diesen sogenannten **Higgsmechanismus** wird das Auftreten massiver Dinge, die man in die Hand nehmen kann, ebenfalls auf Symmetrieverhältnisse zurückgeführt. Zur Veranschaulichung des Higgsmechanismus wird ein Abelsches Eichfeld an das skalare Feld angekoppelt. Dabei muss neben der globalen $U(1)$ Symmetrie auch die lokale Eichsymmetrie berücksichtigt werden, nach der Invarianz bei der Eichtransformation

$$\Phi \to e^{i\alpha(x)}\Phi, \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{2}$$

zu fordern ist. Zu diesem Zweck muss zu eichinvarianten Ableitungen übergegangen werden. Das erweiterte Modell hat die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_\mu\Phi^\dagger D^\mu\Phi + m^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{3!}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \\ D_\mu\Phi &= \partial_\mu\Phi + ieA_\mu\Phi, \quad D^\mu\Phi^\dagger = \partial^\mu\Phi^\dagger - ieA^\mu\Phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned}$$

Wiederum wird das komplexe skalare Feld mit reellen Feldern aufgebaut $\Phi = \rho(x)e^{i\Theta(x)}/\sqrt{2}$. Eine Eichtransformation bewirkt eine Verschiebung der Phase $\Theta(x) \to \Theta(x) + \alpha(x)$. Daher lässt sich durch eine spezielle Eichung das Θ-Feld eliminieren. In diesem Fall werden Fluktuationen um den Vakuumzustand durch das reelle Feld $\chi = \rho - v$ beschrieben, mit dessen Hilfe die Lagrangedichte auf die Form

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{e^2}{2}(\chi + v)^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda v^2}{3!}\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\chi^2(\chi^2 + 4v\chi)$$

gebracht wird. Eine Goldstone Mode tritt nicht auf. Vielmehr gibt es zusätzlich zum massiven skalaren Boson mit der Masse $\sqrt{2}m$ ein massives Vektorboson mit der Masse ev. Durch den Higgsmechanismus ist das Strahlungsfeld massiv geworden. Metaphorisch gesagt ist durch eine Symmetrieverschiebung ein dinghaftes Teilchen in die Welt getreten.

Der Higgsmechanismus in seiner allgemeinen Form beinhaltet eine weitergehende Aufwertung des physikalischen Gehalts, der dem Vakuum zugemessen wird. Danach wird das Vakuum durch ein Higgskondensat realisiert, das mit den W und Z Bosonen, sowie den Quarks und Leptonen in Wechselwirkung tritt. Dadurch erhalten die Spin $1/2$-Fermionen (Leptonen und Quarks) und die Spin 1-Eichbosonen ihre Masse. Die Quanten des Higgskondensats, die hypothetischen Higgsteilchen, erzeugen letztlich die massiven Teilchen. Da durch sie das Greifbare in die Welt zu kommen scheint, werden sie auch scherzhaft Gott-Teilchen genannt (wegen $E = mc^2$ sind Masse und Energie nicht zu trennen). Allerdings schmilzt das Kondensat bei den hohen Temperaturen, die in der Anfangsphase des Universums herrschten. Zu jener Zeit konnten die Higgsteilchen nur für den Bestand ihrer eigenen Masse sorgen - Leptonen, Quarks und Eichbosonen waren masselos. Welche Folgen hatte der Phasenübergang im Higgskondensat? Da die Higgsteilchen ins Gewicht fallen und den gesamten Raum durchsetzen, tragen sie beträchtlich zur kosmologischen Konstanten bei. Abschätzungen ergeben, dass sich durch diesen Beitrag die Größe des Universums nach jeweils 10^{-38} Sekunden verdoppeln müsste [7].

Selbst Symmetrieanomalien, die scheinbar nur rechentechnischer Natur sind, haben eine profunde physikalische Bedeutung. Eine QFT muss renormierbar sein. Diese Einschränkung, die klassisch kein Analogon hat, kann dazu führen, dass Symmetrien und entsprechende Erhaltungsgrößen einer klassischen Theorie nach der Quantisierung verloren gehen. Das bedeutet, dass das klassische und quantenfeldtheoretische Eigenschaftsspektrum nicht identisch sein müssen. Dieser Sachverhalt wird illustriert an Hand der axialen Symmetrie. Die Feldgleichung der freien, masselosen Dirac Fermionen

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I$$

ist invariant gegenüber einer globalen $U(1)$ Phasentransformation $\psi(x) \to e^{i\Theta}\psi(x)$, so dass ein Viererstrom existiert $J^\mu = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi$, für den ein Erhaltungssatz gilt $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$. Dementsprechend ist die Ladung $Q = \int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^\dagger\psi$ eine Erhaltungsgröße. Das freie Dirac Feld gehorcht einer weiteren Symmetrie. Mit Hilfe der chiralen Projektionsmatrizen $P_\pm = (I \pm \gamma_5)/2$ mit $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, lässt sich ψ in chirale Komponenten zerlegen $\psi_\pm = P_\pm\psi$, die ebenfalls die Dirac-Gleichung erfüllen $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_\pm(x) = 0$. Da die Komponenten $\psi_\pm$ unabhängig voneinander sind, gibt es den weiteren Erhaltungssatz $\partial_\mu J_5^\mu(x) = 0$, wobei $J_5^\mu = J_+^\mu - J_-^\mu \equiv \psi_+^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi_+ - \psi_-^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi_- = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi$. Diese Kontinuitätsgleichung ist Folge einer weiteren $U(1)$ Phasensymmetrie, die bezüglich der Transformation $\psi \to \psi e^{i\gamma_5\Theta}$ besteht. Bei Anwesenheit eines Abelschen Eichfeldes ändert sich die Situation. Dann ist die Invarianz der Theorie gegenüber lokalen Eichtransformationen (2) zu fordern, so dass die Lagrangedichte des Dirac Feldes die Form

$$\mathfrak{L} = i\overline{\psi}\not{D}\psi, \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \quad \not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)$$

annimmt. Während klassisch weiterhin beide Ströme $J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ und $J_5^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ erhalten bleiben, gilt dies nicht mehr in der QFT. Es lässt sich kein Renormierungsverfahren angeben, das beide Kontinuitätsgleichungen $\partial_\mu J^\mu = 0$ und $\partial_\mu J_5^\mu = 0$ intakt lässt. Offenbar muss durch einen Willkürakt ein Erhaltungssatz fallengelassen werden. Doch welcher? Der Verzicht auf die Eichinvarianz hat weitreichende Folgen und ruft Geisterteilchen mit negativer Norm aus der Unterwelt herauf. Daher lässt man lieber die chirale Rotationssymmetrie fallen, wodurch eine anormale Kontinuitätsgleichung für den axialen Viererstrom entsteht

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}.$$

Diese Symmetrieanomalie hat physikalische Konsequenzen. Beispielsweise ist nach der klassischen Theorie das neutrale Pion stabil. Infolge der Symmetrieanomalie der QFT zerfällt es aber in zwei Photonen, was durch Experimente bestätigt wird. Bei nicht-Abelschen Theorien kommen noch Eichanomalien hinzu, die beim Aufbau der Theorie beachtet werden müssen. Selbst symmetriebedingte Defekte der QFT, die scheinbar lediglich formalen Charakter haben, sind von profunder physikalischer Bedeutung.

3 Schlingert auch die QFT?

Von Anfang an hatte die QFT damit zu tun, unendliche Rechengrößen unter den Teppich zu kehren. Durch die Selbstwechselwirkung entstehen in der QFT divergierende Beiträge, die in den Kopplungskonstanten aufgenommen werden müssen. Dieses Verbergen von Divergenzen gelingt nur für geeignete Modelle. Die **Renormierbarkeit** einer Theorie erfordert den Nachweis, dass alle divergierenden Integrale, die bei einer störungstheoretischen Behandlung auftreten, durch endlich viele Kopplungskonstanten absorbiert werden können. Dabei ist der Umgang mit diesen Unendlichkeiten trickreich, da beispielsweise aus den divergierenden Selbstwechselwirkungstermen Strahlungskorrekturen herausgenommen werden, die in der Form des Lamb Shifts beobachtbare Konsequenzen haben. Daher ist das gesamte Renormierungsverfahren scheinbar unseriös und physikalisch untragbar. Gemäss der Wilson'schen Interpretation trifft diese Aussage nicht den Sachverhalt. Vielmehr ist die Renormierungsprozedur ein probates Mittel, um die Physik bei hohen Energien durch Variation der Kopplungsparameter des Lagrangians zu verstehen. Dieser Gedanke soll am Beispiel des Ising Spin Modells für ein zweidimensionales Gitter kurz erläutert werden. Ausgehend vom Hamiltonian $H = -J\sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j$, $s_i = \pm 1/2$ kann aus dem räumlichen Abfall der Korrelationsfunktion $\langle s_i s_j\rangle \sim \exp(-|x_{ij}|/\xi)$ eine Korrelationslänge ξ bestimmt werden. Durch Anwendung einer Dezimierungsprozedur lassen sich neue Basiselemente des Modells konstruieren, deren Kopplung entsprechend geändert ist. Durch Bildung von Spinblöcken B_a (beispielsweise durch $s_a^{(1)} = sgn(\sum_{i\in B_a} s_i)/2$) lässt sich die Nahordnung auf neue effektive Freiheitsgrade transformieren und die entsprechende Korrelationslänge $\xi^{(1)}$ ermitteln. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Prozedur wird durch den Dezimierungsoperator R eine fortlaufende Abbildung $H \xrightarrow{R} H^{(1)} \xrightarrow{R} \ldots \xrightarrow{R} H_*$ im Raum aller Hamiltonians gestiftet, die mit der Symmetrie des Systems kompatibel sind. Die Folge der Korrelationslängen ξ, $\xi^{(1)}\ldots$, kann unter Umständen an einem Fixpunkt ξ_* enden, der entweder Null oder unendlich sein kann. Ein nichttrivialer Fixpunkt ($\xi_* = \infty$) der Renormierungsgruppentransformationen zeigt einen Phasenübergang an. Die Renormierung der Kopplungskonstanten kann daher aufgefasst werden als eine Bewegung im Raum aller kompatiblen Hamiltonians, durch die lang- und kurzreichweitige Korrelationen miteinander in Verbindung gebracht werden. Eine QFT beruht daher auf einem ganzen Bündel gleichrangiger Modelle. Ein Fluss der Kopplungskonstanten entsteht durch Anwendung der Renormierungsgruppentransformation. Der intrinsische Vielteilchenaspekt der QFT äußert sich daher in der Verwandtschaft mit der statistischen Physik nebst der Theorie der Phasenübergänge. Die Renormierung der Kopplungskonstanten ist somit kein peinliches Verfahren zur Beseitigung von Singularitäten, sondern eine physikalisch wohlbegründete Methode, dem Vielteilchencharakter der QFT gerecht zu werden.

Ist mit diesen wohlwollenden Äußerungen die QFT rehabilitiert? Verglichen mit der nichtrelativistischen QM entsteht in der QFT ein fundamental neues Problem. Das hängt mit der unitären Äquivalenz aller Darstellungen der Vertauschungsrelationen zusammen. Zur Illustration der Ausgangslage betrachten wir die Vertauschungsregeln $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$ und $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$. In der Schrödingerdarstellung wird der Hilbertraum aufgespannt durch alle komplexwertigen, quadrat-integrablen Funktionen $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Die Wirkung der Operatoren ist definiert durch

$$q_i f(x, \dots x_n) = x_i f(x, \dots x_n), \quad p_j f(x, \dots x_n) = i \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, \dots x_n).$$

Für mathematische Zwecke wird oft die äquivalente Weyl'sche Darstellung der kanonischen Kommutatorrelationen bevorzugt. Deren Formulierung basiert auf den Operatoren $U_i(q) = e^{ip_i q}$, $V_j(p) = e^{iq_j p}$, für die gilt:

$$[U_i(q), U_j(q)] = [V_i(p), V_j(p)] = 0, \quad U_i(q) V_j(p) = V_j(p) U_i(q) e^{ipq\delta_{ij}}$$

mit $p, q \in \mathbb{R}^n$. Die Liste der verschiedenen Darstellungen von Vertauschungsrelationen ließe sich beliebig fortsetzen. Für die gewöhnliche QM gilt, dass alle unitär äquivalenten irreduziblen Darstellungen der Vertauschungsrelationen physikalisch vollkommen gleichwertig sind. Diesen Sachverhalt bringt das Stone-von Neumann'sche Theorem zum Ausdruck. Die QFT unterscheidet sich von der nichtrelativistischen QM dadurch, dass in ihr die Zahl der Freiheitgrade notgedrungen unendlich ist. Eine Folge davon ist, dass es in der QFT unendlich viele unitär nicht-äquivalente Darstellungen der Vertauschungsrelationen gibt. Dementsprechend kann im allgemeinen durch keine unitäre Transformation nachgewiesen werden, dass die Erwartungswerte unabhängig von der gewählten Darstellung sind. Dadurch erhebt sich das prinzipielle Auswahlproblem: welche Kriterien sollen herangezogen werden, um eine gegebene Darstellung zu bevorzugen? Aber das Problem geht noch tiefer und betrifft selbst die Dynamik eines Systems, die gewöhnlich durch eine unitäre Zeitentwicklung dargestellt wird. Es ist von vornherein nicht klar, ob Darstellungen der gleichzeitigen Vertauschungsrelationen zu verschiedenen Zeiten unitär äquivalent sind, so dass die Zeitentwicklung vom Anfang bis zum Ende konsistent verfolgt werden kann und zwar insbesondere auch dann, wenn Phasenübergänge durchlaufen werden. Diese Unsicherheit, die durch das **Haag'sche Theorem** [8] ausgedrückt wird, überträgt sich auf die Störungstheorie, die häufig in der Wechselwirkungsdarstellung formuliert wird und durch die Wechselwirkungseffekte gewöhnlich erst greifbar werden. Die überwältigenden Erfolge beispielsweise der Quantenelektrodynamik können in dieser Hinsicht nicht überzeugen, denn es bleibt das mathematische Problem, das in der Frage gipfelt: gibt es gegenwärtig überhaupt ein physikalisch realistisches Hilbertraum-Modell, das nichttriviale Wechselwirkungen in einer vierdimensionalen Raum-Zeit Geometrie konsistent beschreibt?

Rainer Maria Rilke

Ich fürchte mich so vor der Menschen Wort.
Sie sprechen alles so deutlich aus:
Und dieses heißt Hund und jenes heißt Haus,
und hier ist Beginn, und das Ende ist dort.

Mich bangt auch ihr Sinn, ihr Spiel mit dem Spott,
sie wissen alles, was wird und war;
kein Berg ist ihnen mehr wunderbar;
ihr Garten und Gut grenzt grade an Gott.

Ich will immer warnen und wehren: Bleibt fern.
Die Dinge singen hör ich so gern.
Ihr rührt sie an: sie sind starr und stumm.
Ihr bringt mir alle die Dinge um.

Literatur

[1] G. W. F. Hegel, *Enzyklopädie der Philosophischen Wissenschaften* (PUBLISHER, Heidelberg, 1830).

[2] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, Nature Physics **2**, 620 (2006).

[3] N. Stander, B. Huard, and D. G. Gordon, Phys. Rev. Lett. **102**, 026807 (2009).

[4] P. Teller, *An Interpretative Introduction to Quantum Field Theory* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995).

[5] R. Schützhold, H. Gies, and G. Dunne, Phys. Rev. Lett. **101**, 130404 (2008).

[6] M. J. Sparnaay, Physica **27**, 751 (1958).

[7] F. Wilczek, Nature **433**, 239 (2005).

[8] J. Earman and D. Fraser, Erkenntnis **64**, 305 (2006).